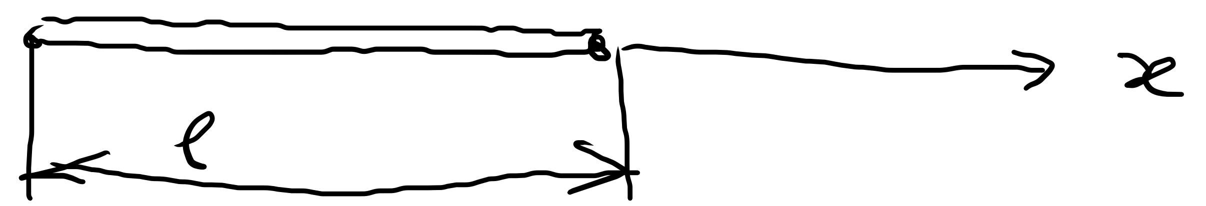
Нагрев стержня.



$\underline{u = u(t,x)}$

$t \in (0,T), \quad x \in (0,l)$

$Q = (0,T) \times (0,l)$

коэфф. температуропроводности

$$(*) \quad \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0. \\ \underline{u(t,0) = u(t,l) = 0} \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

однор. ур-е теплопроводности

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0$$

$$u(t,x) = T(t)\,X(x)$$

$$T_t X - a^2 T X_{xx} = 0.$$

$$\frac{T_t}{a^2 T} = \frac{X_{xx}}{X} = \lambda.$$

$u(t,0) = X(0)T(t) = 0$

$u(t,l) = X(l)T(t) = 0$

Част. случай задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X_{xx} - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{T_t - a^2 \lambda T = 0}.$$

① $\cancel{\lambda = 0}$ $X_{xx} = 0 \Rightarrow X = Ax + B$

$\Rightarrow A, B = 0 \Rightarrow X \equiv 0$

② $\cancel{\lambda > 0}$ $X(x) = A \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x + \cancel{B \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x}.$

$0 = X(0) = B$, $0 = X(l) = A \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} l \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow X \equiv 0.$

③ $\lambda < 0$.

$$X(x) = A \sin\sqrt{-\lambda}\,x + \cancel{B \cos\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

$$0 = X(0) = B \quad , \quad 0 = X(l) = A \sin\sqrt{-\lambda}\, l$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} A = 0 \Rightarrow X \equiv 0 \\ \sin\sqrt{-\lambda}\, l = 0. \end{array}\right.$$

$$\sqrt{-\lambda}\, l = k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \qquad X(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$T_t + \frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} T = 0. \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$T = A e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t}$$

(1) $$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Итак: $u(t,x)$ "формально" решение

$$\varphi(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

(2) $$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s) \sin\frac{k\pi s}{l}\, ds$$

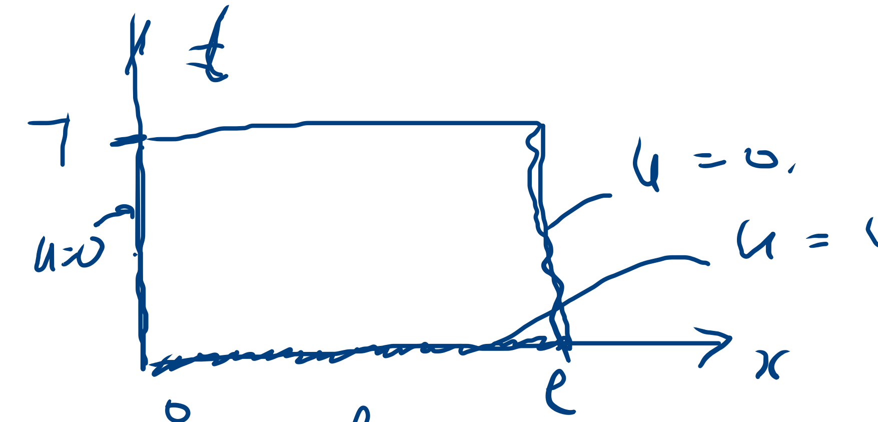
~~Классическое~~ Решение

1) $u \in C(\bar{Q})$

2) $u_{xx} \in C(Q)$

$u_t \in C(Q)$

$Q = (0,T) \times (0,l)$



Обобщенное (слабое) решение.

3) когда подст. u, u_t, u_{xx} в задачу, получу тождественное равенство.

!

При каких нач. данных φ можно гарантировать, что (1), (2) — классич. решение (∗) и никаких других решений нет.

(3) $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

пр-во Соболева

Th. φ — абс. непр. ф-ция на $(0,l)$, $\varphi' \in L^2(0,l)$ и при этом φ удовл. (3).

Тогда (1), (2) задает классич. реш. $(*)$, причем других кл. решений нет.

Д-во:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} t} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$\frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} =: \mu_k$

$$\left| A_k e^{-\mu_k t} \sin\frac{k\pi x}{l} \right| \le |A_k|$$

Дост. д-ть, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$. $\left(\Rightarrow u \in C(\overline{Q}) \right)$

Докажем это.

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{k\pi s}{l} ds$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi x}{l} A_k \cos \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

$$+\infty > \|\varphi'\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \quad \text{(рав. Парсеваля)}. \qquad A_k = \frac{l b_k}{k\pi}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|A_k| = \frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k} \leq \frac{l}{\pi}\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}_{<+\infty} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}_{<+\infty}\Big)$$

$$\left(|b_k|\cdot\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}b_k^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{k^2}\right)$$

$\Rightarrow$ ряд (1) сход. равном. (и абсолютно) на $\overline{Q}$,

$u \in C(\overline{Q})$,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \lim_{t\to 0}\sum_k A_k e^{-\mu_k t}\sin\frac{k\pi x}{l} = \sum_k \lim_{t\to 0} A_k e^{-\mu_k t}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$= \sum_k A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \varphi(x),$$ т.е. н.у. вып.,

$$\lim_{x\to 0,l} u(t,x) = \lim_{x\to 0,l} \sum_k A_k e^{-\mu_k t} \sin\frac{k\pi x}{l} =$$

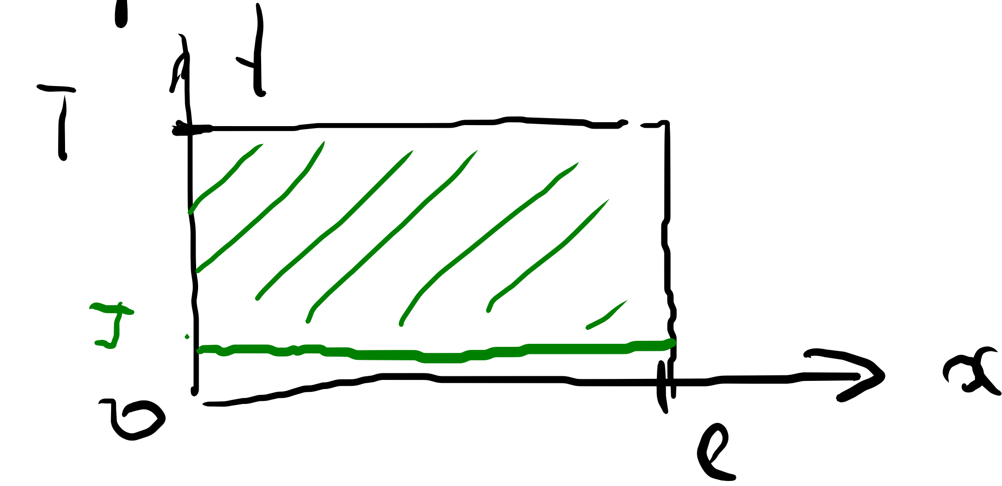
$$= \sum_k \lim_{x\to 0,l} A_k e^{-\mu_k t} \sin\frac{k\pi x}{l} = 0,$$

т.е. гр. усл. выполнены.

Теперь проверим, что (1) удовл. ур-ю.

$Q_T := (\tau, T)\times(0,l)$

$\tau > 0$ произв.



равном. на $\overline{Q}_T$ (4)

Равномерно продифф. ряд (1).

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu_k e^{-\mu_k t} \sin\frac{k\pi x}{l} = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{k^2\pi^2}{l^2} e^{-\mu_k t} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

(5) $$u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}k^2 t} \frac{k^2\pi^2}{l^2} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{k\pi s}{l}\,ds \qquad |\varphi| \le M$$

$$|A_k| \le \frac{2}{l} M \int_0^l \underbrace{\left|\sin\frac{k\pi s}{l}\right|}_{\le 1} ds \le 2M.$$

$t \in (J, T)$ $\left| A_k \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} a^2 e^{-a^2 k^2 \pi^2/\ell^2 t} \sin \frac{k \pi x}{\ell} \right| \leq$

$$\leq \frac{\pi^2 a^2}{\ell^2} 2M \underbrace{k^2 e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{\ell^2} J}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \underbrace{e^{-\alpha k^2}}_{a_k} < +\infty \qquad \alpha = \frac{a^2 \pi^2}{\ell^2} J > 0$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 e^{-\alpha \left(\cancel{(k+1)^2 - k^2}\right)} = 0$$

$\to 1$

$2k+1$

Итого u_t, u_{xx} предст. равном. в $\overline{Q}_T$ сх. рядами

$(\underline{4}), (5)$,

в частности, $u_t \in C(\overline{Q}_T)$, $u_{xx} \in C(\overline{Q}_T)$ $\Rightarrow$ $u_t \in C(Q)$, $u_{xx} \in C(Q)$,

$T > 0$ произв.

$$u_t = a^2 u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} e^{-\mu_k t} \sin\frac{k\pi x}{l} + a^2 \sum_{k=1} A_k \frac{k^2 \pi^2}{l^2} e^{-\mu_k t} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$= \frac{a^2 \pi^2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\mu_k t} \sin\frac{k\pi x}{l} \underbrace{\cancel{(-1+1)}}_{0} = 0.$$

То есть u, опред. (1), (2) – классич. реш. (*).

Осталось д-ть, что другого нет.

Любопытное следствие конструкции:

$Q_T = (0, T] \times (0, l)$, $\boxed{T > 0}$

(!) ряды для производных ЛЮБОГО порядка сход. равном. в $\overline{Q_T}$ $\forall T > 0$.

То есть $\boxed{u \in C^{\infty}(Q)}$