? $\exists$ $f(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{\ln k}$

$g(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$

$f, g \in L^1(0,\pi)$

Частн. случай нер-ва Фридрихса

Задача 3.13 Д-ть $f \in C^1([0,\pi])$, $f(0) = f(\pi) = 0$.

Тогда $\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx \le C \int_0^{\pi} f'^2(x)\,dx.$ (S)

$C > 0$ не зав. от f

Нер-во Стеклова

И найти самую наилучшую $C > 0$, для которой это нер-во верно

N.B. $\left\{ \begin{array}{l} f \in C^1(\overline{\Omega}) \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^1 \text{ огр. откр. мн-во} \\ f(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \\ \text{Тогда} \quad \displaystyle\int_\Omega f^2(x)\,dx \le C \int_\Omega |\nabla f|^2(x)\,dx. \end{array} \right.$

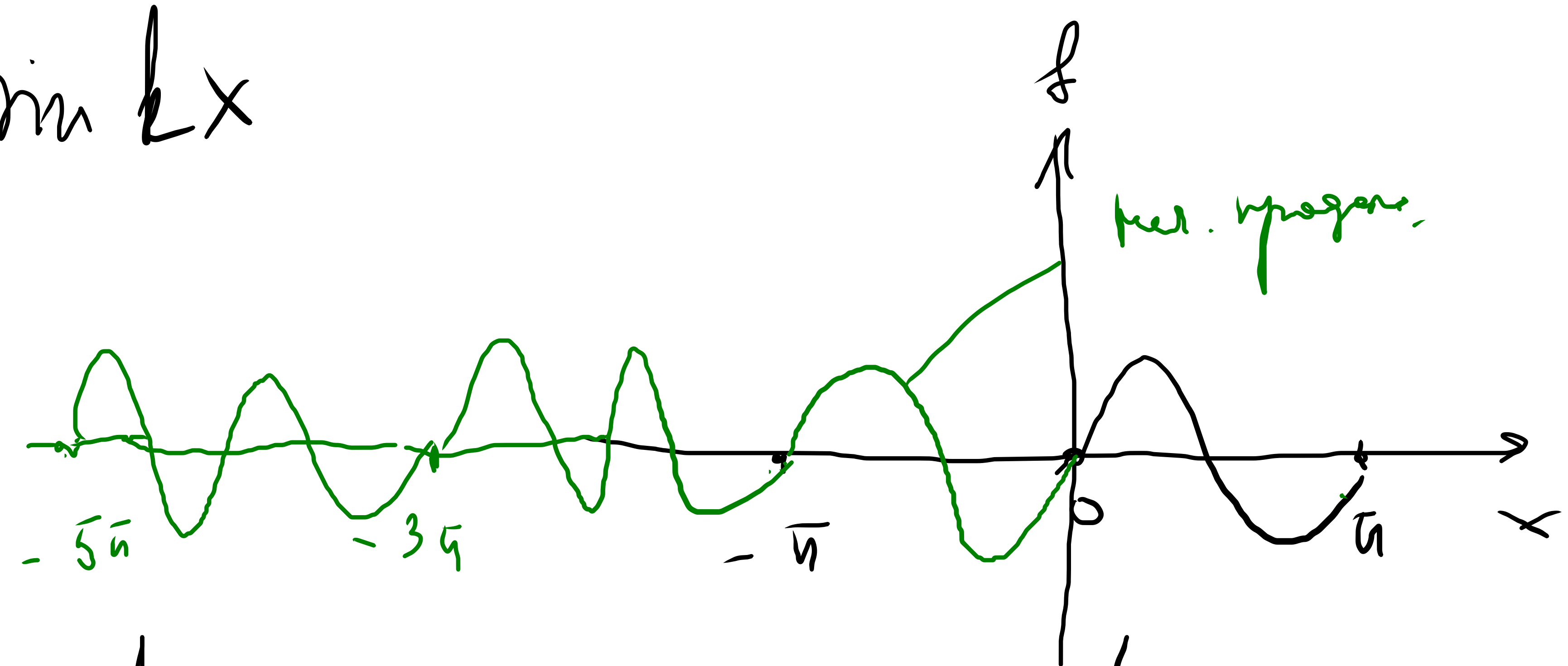
нер-во Фридрихса.

Д-во нер-ва Стеклова.

$\longrightarrow$ в прошлый раз доказали при помощи нер-ва Гёльдера.

$\longrightarrow$ Д-во при помощи рядов Фурье.

$$f(x) = \sum_k a_k \sin kx$$



$$\rightsquigarrow\ f'(x) = \sum_k \tilde{a}_k \cos kx = \sum_k k a_k \cos kx.$$

$$\tilde{a}_k = k a_k. \qquad \left(a_k = \frac{\tilde{a}_k}{k} \right)$$

$$\{\tilde{a}_k\} \in \ell^2$$

рівність Парсеваля

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx = \sum_k a_k^2 \cancelto{\pi/2}{\int_0^\pi \sin^2 kx\,dx} = \frac{\pi}{2} \sum a_k^2$$

$$\int_0^{\pi} f'^2(x)\,dx \overset{\text{рав. Парсеваля}}{=} \sum_k k^2 a_k^2 \cancel{\int_0^{\pi} \cos^2 kx\,dx} = \pi/2$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_k k^2 a_k^2 \geq \frac{\pi}{2}\sum_k a_k^2 = \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Когда тут может выполнится "=" ?

$k^2 \geq 1.$

$$\int_0^{\pi} f^2\,dx \leq \int_0^{\pi} f'^2\,dx$$

(нер-во Стеклова, $C = 1$)

Когда $\sum_k k^2 a_k^2 = \sum_k a_k^2$?

$$\Updownarrow$$

$$\sum_k (k^2-1) a_k^2 = 0 \iff \boxed{a_k = 0, \quad k \neq 1}$$

Имеем задачу $f(x) = a_1 \sin x$.

Итого: оптимальная const $C = 1$.

(достигается равенство на $f(x) = \sin x$)

ВАЖНОЕ Д/З:

$f \in C^1([-\pi, \pi])$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

Д-ть: $$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \le C \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,dx$$

нер-во Пуанкаре — Виртингера.

($C > 0$ не зависит от f)

и найти мин C, для которой такое нер-во выполняется

(В более общем сл.: $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ огр. откр.

$$\int_\Omega f = 0 \Longrightarrow \int_\Omega f^2\,dx \le C \int_\Omega |\nabla f|^2\,dx$$

нер-во Пуанкаре – Виртингера

N. B. $\displaystyle\int_0^\pi f^2(x)\,dx \le C \int_0^\pi f'^2(x)\,dx.$ $\quad f(0)=f(\pi)=0$

$$\frac{\int_0^\pi f'^2(x)\,dx}{\int_0^\pi f^2(x)\,dx} \ge \frac{1}{C}.$$

$$\frac{1}{C_{opt}} := \inf \left\{ \underbrace{\frac{\int_0^1 f'^2\,dx}{\int_0^1 f^2\,dx}}_{\Phi(f)} : f \in C^1([-\pi,\pi]),\ f(0)=f(\pi)=0 \right\}$$

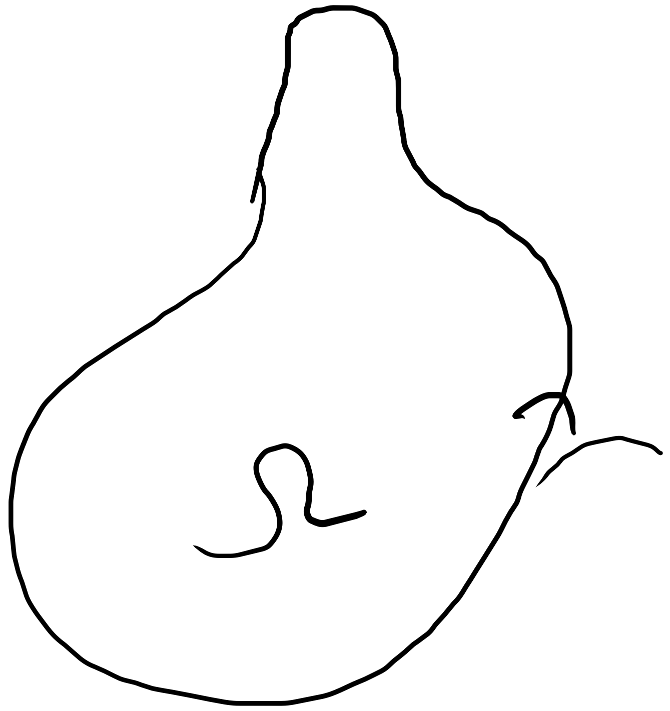
$$= \inf \left\{ \int_0^1 f'^2\,dx : f \in C^1([-\pi,\pi]),\ f(0)=f(\pi)=0,\ \int_0^1 f^2\,dx = 1 \right\}$$

Задача вар. исчисления.

Задача (3.15?) Д-л изопериметрич. нер-во на плоскости.

Изопериметрич. задача

Задача Дидоны.



Θ — простая замкн. кривая в $\mathbb{R}^2$ ограничив. область Ω

Тогда $|\Omega| \le C\, L^2(\partial\Omega)$

$L(\partial\Omega)$ = длина Θ

И равенство реализуется на круге (Ω = круг, Θ — окружность)

В изоп-ве " $\underbrace{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}} \leq C\, \sigma_{n-1}(\partial\Omega)" \text{ в } \mathbb{R}^n}$

$|\Omega|$ — n-мерн. объем

Д-во изоп-ва в $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$

Θ: $\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right| \Rightarrow z = x + iy$

$z = z(t)$.

$t \in [-\pi, \pi]$

$|\dot{z}|(t) = \text{const}$.

$$\boxed{z(-\pi) = z(\pi)}$$

$$L = \ell(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|\dot z|(t)}_{\| \atop C.} \, dt = C \cdot 2\pi .$$

$$\boxed{|\dot z|(t) = \frac{L}{2\pi}.}$$

Задача: Выразить через $z(t)$ площадь Ω.

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x(t)\,dy(t) - y(t)\,dx(t)\right) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\,dy - y\,dx) =$$

Теор Грина

$$= \frac{1}{2}\iint_{\Omega} 2\,dx\,dy$$

Ω – огр. кривой θ: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\boxed{|\Omega| = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(xy' - yx')\,dt = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}(t)z'(t)\,dt}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(xy' - yx')\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\bar{z}(t)z'(t)}{i} - \cancel{\frac{1}{2i}\frac{d}{dt}|\bar{z}(t)|^2}\right)dt =$$

$$\bar{z}(t)z'(t) = (x(t) - iy(t))(x'(t) + iy'(t)) = xx' + yy' + i(xy' - x'y) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) + i(xy' - x'y)$$

/ T.k. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dt}\left(|z(t)|^2\right)dt = |z(t)|^2\Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$= |z(\pi)|^2 - |z(-\pi)|^2 = 0$. /.

$$z(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt} \qquad \dot{z}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik c_k e^{ikt}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\dot{z}(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k k|^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ikt} dt =$$

$$= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |kc_k|^2$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\dot z(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{L^2}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{\cancel{2\pi}}\,\cancel{2\pi} = \frac{L^2}{4\pi^2}.$$

Итого: $\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\overline{z(t)}\,z'(t)\,dt = \sum_k\int_{-\pi}^{\pi}\overline{c_k}\,\cancel{e^{-ikt}}\cdot ik\,c_k\,e^{ikt}\,dt = \sum_k k|c_k|^2\cdot 2\pi i$$

Usiamo $\displaystyle \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}(t)\, z'(t)\, dt = \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\,|c_k|^2$

$$\frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}(t)\, z'(t)\, dt = |\Omega|$$

$$|\Omega| = \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\,|c_k|^2$$

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\,|c_k|^2$$

$$\Rightarrow \quad 4\pi|\Omega| = 4\pi^2 \sum_k k\,|c_k|^2$$

$$L^2 - 4\pi|\Omega| = 4\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (k^2-k)\,|c_k|^2$$

$=?$

≥ 0 $\quad \geq$

0

I.e. $L^2 - 4\pi|\Omega| \geq 0$

$$|\Omega| \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

(т.е. изопериметрич. нер-во доказано с $C = \frac{1}{4\pi}$)

"$=$" тогда и только тогда, когда $C_k = 0$, $k \neq 0, 1$,

т.е. для
$$z(t) = C_0 + C_1 e^{it} = C_0 + C_1 \cos t + i C_1 \sin t$$

это окружность с центром в $C_0 \in \mathbb{C}$ и радиусом $|C_1|$

$\Rightarrow$ $C = \frac{1}{4\pi}$ — оптимальная константа.