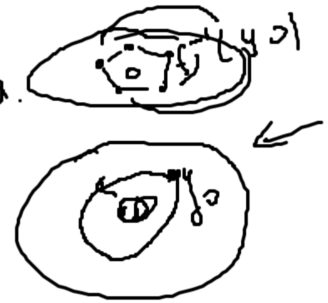
Числа Гурвица. Лекция 7

В прошлый раз — неразв. накрытия.



Главный пример $f: z \to z^n$

проколотый диск

у точки y_0 n прообразов

Расположены в верш. правильного n-угольника

Обход вокруг прокола — поворот n-угольника на $\frac{2\pi}{n}$ $\Leftrightarrow$ циклическая перестановка прообразов y_0.

Разветвленные накрытия

$p: M \to N$ — накрытие N — поверхность с проколами.

N

Ограничение p на D имеет вид $z \to z^{n_i}$

Пример Разветвл. накрытие является накрытием только если все $n_i = 1$

n_i — длины циклов соответствующих перестановок.

Формула Римана-Гурвица

$\chi(M) = n(\chi(N) - k) + m_1 + \dots + m_k$

$p: M \to N$ M, N – двумерные поверхности в-р-т п

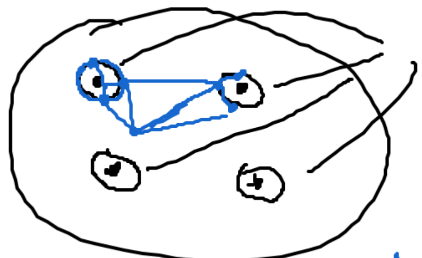
k – число точек ветвления

m_i – число прообразов i-ой точки

$\Updownarrow$

число циклов у соотв. перестановки.

Д-во. $N = N_A \cup N_B$



N_A – объед. замкн. дисков

$\chi(N) = \chi(N_A) + \chi(N_B) - \underbrace{\chi(N_A \cap N_B)}_{=0} = \chi(N_A) + \chi(N_B)$ (1)

$M = M_A \cup M_B$ $\chi(M) = \chi(M_A) + \chi(M_B)$ (2)

(3) $\chi(M_B) = n \cdot \chi(N_B)$ – по утв. для неразветвл. накрытий

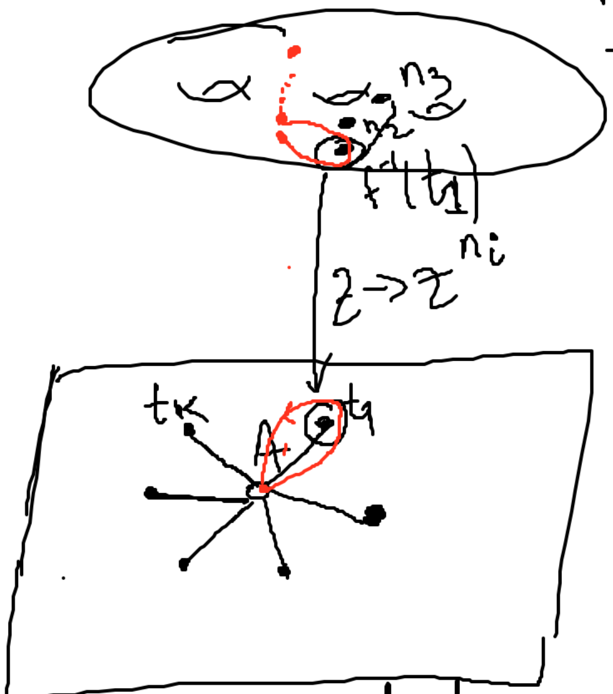
$\Downarrow$

$\chi(M) - \chi(M_A) = n(\chi(N) - \chi(N_A))$

$N_A = k$ кругов $\Rightarrow \chi(N_A) = k$; $M_A = m_1 + \dots + m_k$ кругов $\Rightarrow \chi(M_A) = \sum_{i=1}^{k} m_i$

$$2 - 2g = n(2-k) + \sum_{i=1}^{k} m_i$$

Новое опр. чисел Гурвица



$|f^{-1}(t_1)| < n$

$|f^{-1}(A)| = n$

$\boxed{m_1 = 3}$

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_{m_1}$

S^2 сфера

Над точкой $\bar{t}_1$ m_1 ~~набор~~ дисков. И в каждом ~~наборе $n_1, \dots, n_{m_1}$ дисков~~. На каждом диске отобр. имеет вид $z \to z^{n_i}$, $i = 1 \dots m_1$.

• точки ветвления

o - обычная точка

с точностью до сохраняющего ориентацию гомеоморфизма

Задача. Сколько классов изоморфизма накрытий поверхн рода g сферу S^2 с ветвлениями в данных точках $t_1, \dots, t_k$ с данными ветвления, т.е. ~~каждой~~ знаем перестановки $\mu^1, \dots, \mu^k$.

Каждое накрытие считаем с весом

$\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1 = id$

Опр $h_{k,\mu^1 \dots \mu^k} = \sum_{f: M \to S^2} \frac{1}{|\mathrm{Aut} f|}$

Пример Простое число Гур

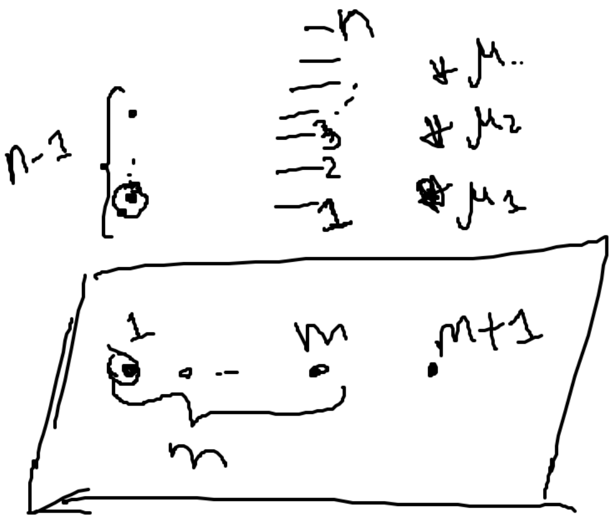
Пример Прямое связное число Гурв. $\sigma = \tau_m \circ \ldots \circ \tau_1 \Longleftrightarrow \tau_m \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \sigma^{-1} = id$

такой же циклический тип как у σ

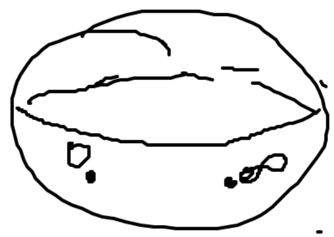
μ

$m+1$ точка ветвления

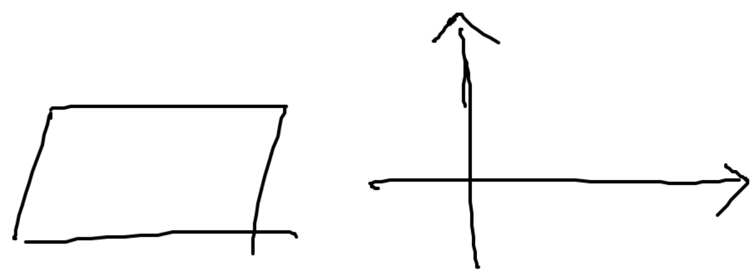
$\mu^1 = \mu,\ \mu^2 = \ldots \mu^{m+1}$ = транспозиции



Пример $z \to z^2$



произв. двух транспозиций



$$\underset{\Downarrow}{2-2g} = 2(\underbrace{2-2\cdot 0}_{\chi(S^2)} \underset{K}{-2}) + \underset{m_1}{1} + \underset{m_2}{1}$$

$g=0$

$$h_{\underset{m}{1},\underset{\mu}{2^1}} = \frac{1}{2} =$$

Пример (Детские рисунки)

$\rho_0 \cdot \rho_1 \cdot \rho_\infty = id$

Детский рисунок прообраз