Обширное семейство вариационных задач — это задачи о нахождении геодезических линий — кратчайших кривых, соединяющих две точки поверхности. С точки зрения механики — это задачи о движении свободной частицы по поверхности. Давайте это докажем.

Рассмотрим движение свободной частицы в n-мерном подмногообразии, вложенном в $\mathbb{R}^N$ $(N > n)$. Вложение задаётся идеальными связями

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad i = 1, \ldots, N \qquad (1)$$

где x_i — декартовы координаты в $\mathbb{R}^N$, а $\{q_\alpha\}_{\alpha=1\ldots n}$ — набор координат на вложенном подмногообразии.

При редукции на поверхность связей (т.е., при подстановке (1)), кинетическая энергия свободной частицы приобретает вид (считаем массу частицы $= 1$)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}(q)\,\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta ,} \qquad (2)$$

где $\boxed{g_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}}$ — индуцированная метрика на вложенном в $\mathbb{R}^N$ подмногообразии. Это — симметрический тензор

2 ранга, положительно определенный.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для частицы с лагранжианом $L \equiv T$ (2) приводятся к виду (проверьте):

$$\boxed{L_\alpha := \sum_\beta g_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta + \sum_{\beta,\gamma}\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}\dot{q}_\beta\dot{q}_\gamma = 0,} \qquad (3)$$

где $\boxed{\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q_\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha}\right)}$

Уравнение (3) принято называть уравнением геодезических, а участвующий в нем объект $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}(q)$ – символом Кристоффеля.

Мы пока вывели (3), как экстремаль действия свободной частицы $S = \int_{t_a}^{t_b} T\,dt$. Чтобы оправдать название уравнений (3), покажем, что их решения являются и экстремалями функционала длины кривой на подмногообразии с метрикой $g_{\alpha\beta}(q)$. Последний функционал выглядит так:

$$\boxed{l[q_\alpha(t)] = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta}(q)\,dq_\alpha\,dq_\beta}} = \int_{t_a}^{t_b}\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta}\,dt$$

подразумевается суммирование по повторяющимся индексам α и β

Здесь a и b — начальная и конечная точки кривых $\{q_\alpha(t)\}_{\alpha=1..n}$. Они фиксированы. t_a и t_b — времена отправления из начальной и прибытия в конечную точку.

Замечаем: $\ell[q_\alpha(t)] = \int\limits_{t_a}^{t_b} \sqrt{2T}\, dt$. Он, конечно, отличается от функционала действия свободной частицы

$$S[q_\alpha(t)] = \int\limits_{t_a}^{t_b} T\, dt$$

Покажем, что экстремали действия S являются экстремалями и для $\forall$ функционала

$$S_f[q_\alpha(t)] = \int\limits_{t_a}^{t_b} f(T)\, dt \text{, где}$$

f — $\forall$ достаточно гладкая функция.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для S_f имеют вид:

$$L_{f,\alpha} := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(T)}{\partial \dot q_\alpha}\right) - \frac{\partial f(T)}{\partial q_\alpha} = f'(T)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{d f'(T)}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha} = f'(T)\cdot L_\alpha + \frac{dT}{dt} f''(T) \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}.$$

Здесь L_α — это уравнение Эйлера-Лагранжа для свободной частицы (3).

Мы получили

$$L_{f,\alpha}\Big|_{L_\alpha = 0} = \frac{dT}{dt} f''(T) \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}$$

Заметим теперь, что для свободной частицы её энергия $E = T$ сохраняется на траекториях движения

$$\frac{dT}{dt}\Big|_{L_\beta=0\ \forall\beta} = 0 \text{ , а значит}$$

$$L_{f,\alpha}\Big|_{L_\beta=0\ \forall\beta} = 0$$, то есть экстремали действия S свободной частицы являются экстремалями и для S_f. В частности, это верно и для функционала длины кривой, для которого $f(T)=\sqrt{2T}$.

<u>Rem</u>: Обратное утверждение <u>неверно</u>: не всякая экстремаль функционала $\ell[q_\alpha(t)]$ является траекторией движения свободной частицы. Дело здесь не в том, что существуют геодезические, по которым не может двигаться свободная частица, их нет. Дело в том, что уравнения экстремалей функционала $\ell[q_\alpha(t)]$ формально имеют бесконечно много решений, отвечающих разным параметризациям одной и той же кривой (это – так называемая <u>репараметризационная инвариантность</u> задачи). Траектория же движения свободной частицы допускает единственную параметризацию параметром времени t.

В современной теоретической и математической физике, не говоря уже о прикладных задачах, встречаются модели, приводящие к более общим вариационным задачам. Действие в некоторых моделях зависит от старших производных по времени ($\dddot{q}(t)$ и далее), а в других не зависит даже от скоростей (модели с множителями Лагранжа). В некоторых случаях экстремум действия приходится искать на функциях, чьи значения в начальный и конечный моменты времени не фиксируются (например, в модели замкнутой струны). Мы обсудим и проиллюстрируем на примерах такие задачи.

Вариационная задача со старшими производными.

Будем искать экстремаль функционала

$$\boxed{S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t))\, dt} \qquad (1)$$

Его дифференциал имеет вид:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta S[\delta q(t)] = &\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q(t)\, dt + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\, \delta \dot{q}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned}} \qquad (2)$$

Вычисление этого дифференциала — упражнение на интегрирование по частям. Приведем его в деталях:

$$\delta S[\delta q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot q + \delta \dot q, \ddot q + \delta \ddot q)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,\ddot q)\,dt + o(\|\delta q\|)$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\delta \ddot q(t) \right\} dt}_{} \qquad (*)$$

Здесь мы работаем с функциями $q(t) \in C^2[t_1,t_2]$, и полагаем, что условие малости $\|\delta q\|$ гарантирует малость $|\delta q(t)|, |\delta \dot q(t)|, |\delta \ddot q(t)| \ \forall\, t \in [t_1,t_2]$.

Преобразуем выражение $(*)$ для δS, интегрируя несколько раз по частям:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q(t) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\right)\delta \dot q(t) \right) dt +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\delta \dot q(t) \right\} \Bigg|_{t_1}^{t_2} = \left(\begin{array}{c} \text{еще раз интегрируем по} \\ \text{частям последнее слагаемое} \\ \text{в интеграле} \end{array} \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot q} \right) \delta q(t)\,dt +$$

$$+ \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot q} \right)\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\delta \dot q(t) \right\} \Bigg|_{t_1}^{t_2}, \text{ что}$$

совпадает с формулой (2).

Итак, экстремали функционала (1) являются решениями дифура 4-го порядка

$$\boxed{\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial}{\partial\ddot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}} + \frac{\partial}{\partial q}\right) L(q,\dot{q},\ddot{q}) = 0} \quad (3)$$

Для $\exists!$ решения этого уравнения (в предположении, что его можно разрешить относительно старшей производной $\ddddot{q}$) нужно задать 4 начальных условия:

$$q(t_0),\ \dot{q}(t_0),\ \ddot{q}(t_0) \text{ и } \dddot{q}(t_0).$$

Вариационная задача предлагает взамен задать 4 граничных условия: по два на каждой границе $t=t_1$ и $t=t_2$. Вид этих условий зависит от выбора пространства функций, на котором ищется экстремаль.

а) Функции $q(t)$ имеют фиксированные значения и фиксированные производные на границах:

$$\boxed{q(t_1)=q_1,\ q(t_2)=q_2;\ \dot{q}(t_1)=\dot{q}_1,\ \dot{q}(t_2)=\dot{q}_2} \quad (4а)$$

В этом случае $\delta q(t)\Big|_{t_{1,2}} = \delta\dot{q}(t)\Big|_{t_{1,2}} = 0$ и граничные члены в $\delta S[\delta q]$ (2) автоматически зануляются. Задачу об экстремали решаем с гран. условиями (4а).

б) Функции $q(t)$ имеют фиксированные значения на границах, но их производные на границах произвольны

$$\boxed{q(t_1)=q_1,\ q(t_2)=q_2;\ \dot{q}(t_1),\ \dot{q}(t_2) - \forall} \quad (4б)$$

В этом случае $\delta q(t)\big|_{t_{1,2}} = 0$ и последнее граничное слагаемое в (2) зануляется, но первое граничное слагаемое, в силу произвольности $\delta\dot{q}(t_1)$ и $\delta\dot{q}(t_2)$ зануляется если, и только если

$$\boxed{\left.\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right|_{t=t_1} = \left.\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right|_{t=t_2} = 0} \qquad (4б2)$$

Задача об экстремали решается с парой гран. условий (4б1) и парой гран. условий (4б2).

в) Функции $q(t)$ могут иметь произвольные значения на границах, но их производные на границах зафиксированы: (4с1)

$$\boxed{q(t_1), q(t_2) - \forall\,; \quad \dot{q}(t_1) = \dot{q}_1\,, \quad \dot{q}(t_2) = \dot{q}_2}$$

В этом случае граничные члены в (2) дают еще пару условий:

$$\boxed{\left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right)\right|_{t=t_{1,2}} = 0,} \qquad (4с2)$$

дополняющих (4с1) до четверки гран. условий для поиска экстремали — решения дифура (3).

Понятно, что можно комбинировать граничные условия б) и в), выбирая разные типы условий на разных границах.

На семинаре мы проиллюстрируем такие вариационные задачи на примере задачи о прогибе балки