Задание 3. R-матрицы и инварианты зацеплений.

1) Представление Бурау.

Проверьте, что формулы

$$\begin{cases} g_i v_k = q v_k, & k \neq i, i+1 \\ g_i v_i = \lambda v_i + x v_{i+1} \\ g_i v_{i+1} = x^{-1} v_i \end{cases} \qquad \forall i = 1, \dots, n-1$$

где $x, q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda := q - q^{-1}$,
задают действие артиновых генераторов $g_i \in H_n(q)$ на n-мерном пространстве с базисом $\{v_k\}_{k=1\dots n}$

Постройте разложение этого представления в прямую сумму неприводимых одномерного и $(n-1)$-мерного представлений. Каким диаграммам Юнга отвечают эти неприводимые представления?

---

2) Проверьте, что следующие R-матрицы удовлетворяют соотношению Гекке и соотношению кос (формулы (5) и (3) записок лекций).

a) R-матрица Дринфельда-Джимбо
см. формулу (7) на стр. 8 записок лекций

б) R-матрица Кулиша-Склянина

см. формулу (7б) на стр. 10 записок лекций

в) R-матрица, действующая на тензорном квадрате 2-мерного пространства, вида

$$R = \left(\begin{array}{cc|cc} q & \cdot & \cdot & \beta \\ \cdot & \lambda & \alpha & \cdot \\ \hline \cdot & \alpha^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -q^{-1} \end{array}\right), \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad (*)$$

В последнем случае параметры α и β следует подобрать так, чтобы соотношение кос выполнилось (они не произвольны).

Rem: для упрощения вычислений можно использовать соображения, приведенные на стр. 8–10 записок лекций. Также здесь и далее при вычислениях можно пользоваться программами аналитического счета (типа "Mathematica").

---

3) Рассмотрим 3 R-матрицы из предыдущей задачи, действующие на $V^{\otimes 2}$, $\dim V = 2$:

а)

$$R_{DJ} = \left(\begin{array}{cc|cc} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{array}\right)$$

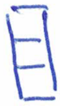
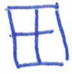
б)

$$R_{KS} = \left(\begin{array}{cc|cc} q & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -q^{-1} \end{array}\right)$$

в) R как в формуле (*) на этой странице

а) Определите кратности собственных значений q и $-q^{-1}$ этих R-матриц.

б)* Вычислите в порождаемых этими R-матрицами представлениях $H_n(q)$ идемпотенты:

- отвечающий диаграмме  (в $H_3(q)$) для R_{DJ}
- отвечающий $\forall$ стандартной таблице формы  (в $H_4(q)$) для R_{KS} и R как в (*).

Убедитесь, что эти идемпотенты лежат в ядре порождаемых R-матрицами представлений $H_n(q)$.

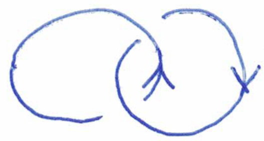
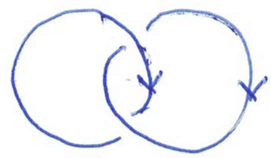
Rem: Верно более сильное утверждение: эти идемпотенты порождают ядра R-матричных представлений $H_n(q)$

4 а) Для R-матриц Дринфельда-Джимбо (см. формулу (7) стр. 8 записок лекций) постройте косо-обратную матрицу Ψ^R и вычислите матрицы C^R и D^R.

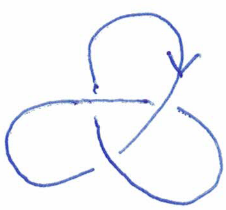
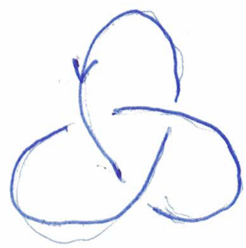
б) Вычислите Ψ^R, C^R, D^R для R-матриц Кулиша-Скленика в случае $\dim V = 2$ и для R-матриц (*) из пункта в) 2-й задачи.

5) Для следующих ориентированных узлов/зацеплений:

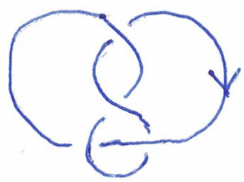
а) зацепление Хопфа

 и 

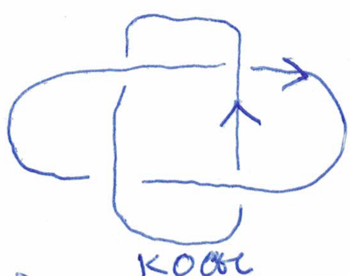
б) трилистник и его зеркальное отражение:

 , 

в) узел "восьмёрка"



г) зацепление вида:



постройте косы, замыканием которых они являются, и вычислите инвариант $f(L)$ (см. формулы (19)-(21) записок лекций)