Задача 5 (из листка для подготовки к К/р №1)

$$\begin{cases} y' = y^2 - \operatorname{arctg}^2 x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Решение. 1) $f(x,y) := y^2 - \operatorname{arctg}^2 x$ опред. всюду на $\mathbb{R}^2$ и непр.

$\Longrightarrow$ реш. существует на каком-то интерв., содерж. 1.

$(\alpha, \beta) \ni 1$

2) $f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow$ реш. единственно.

3). $z(x) := -y(-x)$ $\quad$ $z'(x) = y'(-x) = y(-x)^2 - \operatorname{arctg}^2(-x) =$

$= z^2(x) - \operatorname{arctg}^2 x$

Иначе говоря, если $y(\cdot)$ – решение ур-я, то $z(\cdot)$ – тоже решение (того же ур-я).

/ Картина траекторий симм. отн. O /

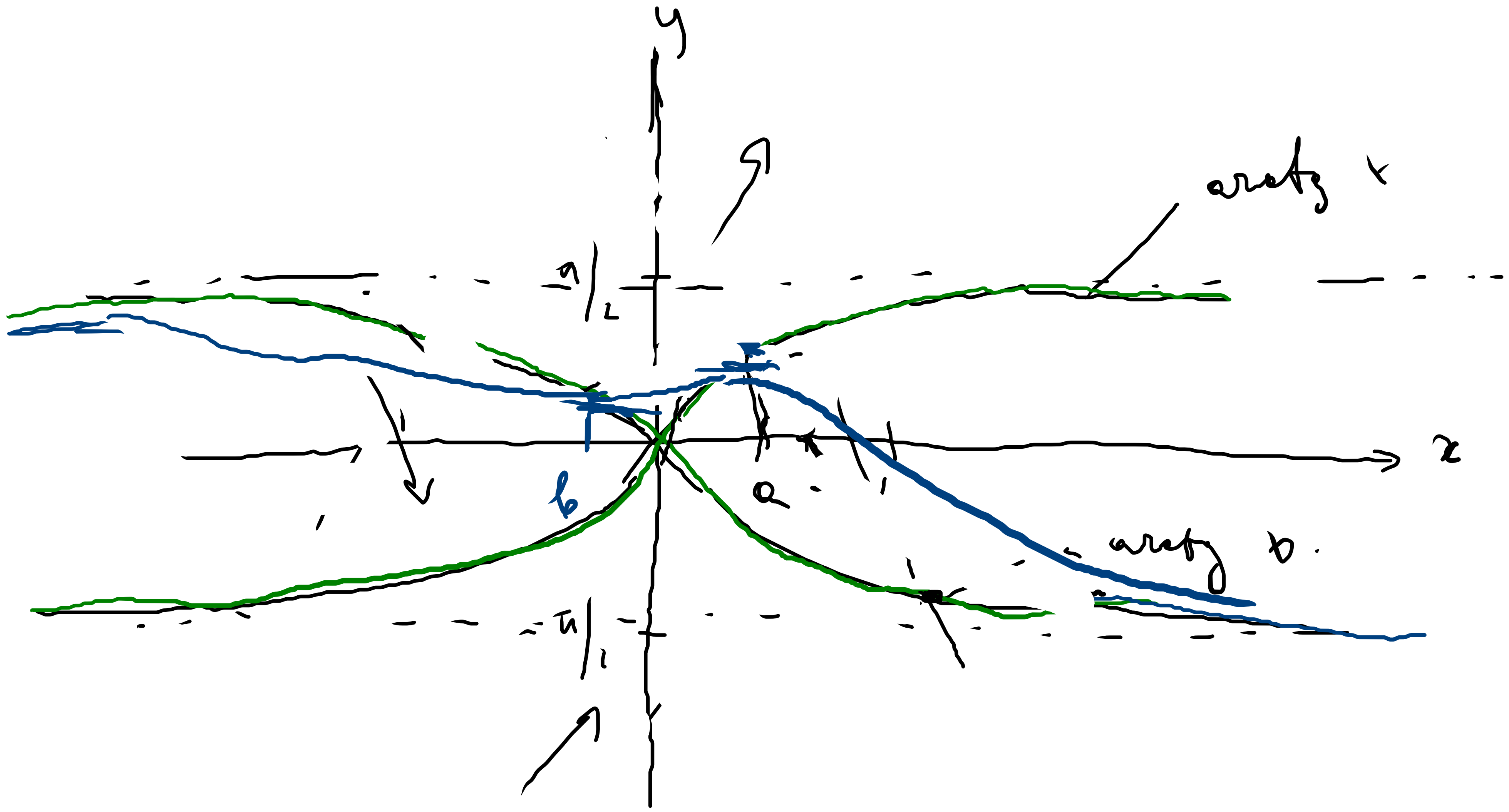
В частности, если $O \in \underbrace{(\alpha, \beta)}$

\ max. интерв. существ. решения, то

(α, β) – симм., т.е. $\beta > 0$, $\alpha = -\beta$

4) Знаки производной.

$$y' = y^2 - \operatorname{arctg}^2 x > 0 \iff \left[\begin{array}{l} y > \operatorname{arctg} x \\ y < -\operatorname{arctg} x. \end{array}\right.$$



$$0 > y(x) > -\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{2}, \quad x > 1.$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\beta = +\infty}$$

Предположим: существует $\bar{x} > 1$:

$$y(\bar{x}) = \operatorname{arctg} \bar{x}$$

Тогда бы $y'(\bar{x}) = 0$.

$$\operatorname{arctg}'(\bar{x}) < 0$$

$$a > 0 \Leftarrow y(a) = \operatorname{arctg} a > y(1) = 0$$

$$x \in (a - \varepsilon, a) \Rightarrow 0 < y(x) < \operatorname{arctg} a$$

Наблюдение 1. $\tilde{y}(x) = 0 \quad \forall x.$

$$0 = \tilde{y}'(x) \geqslant \tilde{y}^2(x) - \operatorname{arctg}^2 x = -\operatorname{arctg}^2 x.$$

$$\tilde{y}' \geqslant \tilde{y}^2 - \operatorname{arctg}^2 x, \quad \tilde{y}(1) = 0$$

$$y' = y^2 - \operatorname{arctg}^2 x, \quad y(1) = 0.$$

$O = \tilde{y}(x) \geq y(x) \quad \forall x \geq 1.$ ← и так знали

$O_1 = \tilde{y}(x) \leq y(x) \quad \forall x \leq 1.$

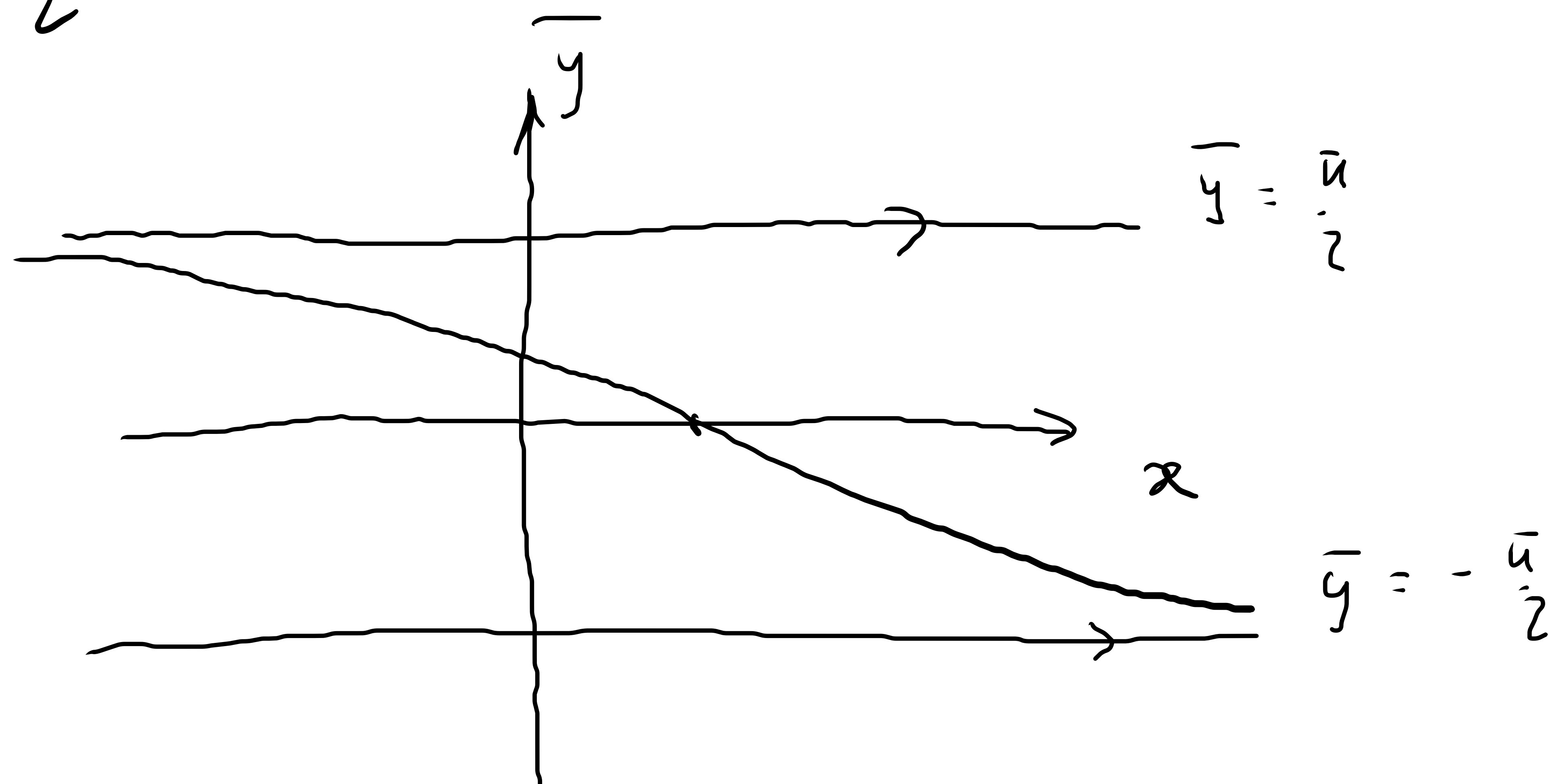
(!) $\forall x \leq 1 \quad y(x) \geq 0.$

Наблюдение 2.

$$y' = y^2 - \operatorname{arctg}^2 x \geqslant y^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{y}^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \\ \bar{y}(1) = 0 \end{cases}$$



$$-\frac{\pi}{2} < \bar{y}(x) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \bar{y}(x) \text{ опред. } \forall x \in R$$

$$\text{и } \bar{y}' < 0 \Rightarrow \bar{y} \downarrow$$

$$\begin{cases} y' \geq y^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 & y(1) = 0 \\ \bar{y}' = \bar{y}^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 & \bar{y}(1) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{\bar{y}^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = dx$$

$$y(x) \geq \bar{y}(x) > -\frac{\pi}{2} \qquad \forall x \geq 1.$$

$$y(x) \leq \bar{y}(x) < \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \leq 1$$

Allora: $\forall x \leq 1 \qquad 0 \leq y(x) \leq \frac{\pi}{2}.$

$$\Downarrow \quad \alpha = -\infty$$

max. интерв. существ.

5) Таким образом:

- $y(\cdot)$ $\underbrace{\text{опред. на } \mathbb{R}}$

- $\forall x \geq 1 \quad -\frac{\pi}{2} < y(x) \leq 0$

  ($= 0$ только при $x = 1$)

  $\forall x < 1 \quad \frac{\pi}{2} > y(x) > 0$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) =: y^+$ ($\exists$ по теор. Вейерштрасса)

$$0 \xleftarrow[k\to\infty]{} \underset{\downarrow\, y^+}{y(k+1)} - \underset{\downarrow\, y^+}{y(k)} \overset{\text{по теор. Лагранжа}}{=} y'(\xi_k)\big((k+1)-k\big) = y'(\xi_k) =$$

$$= \underset{\downarrow\, (y^+)^2}{y^2(\xi_k)} - \underset{\downarrow\, \frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg}^2 \xi_k}$$

$$k \in \mathbb{N} \qquad \underset{\downarrow\, +\infty}{k} \le \underset{\downarrow\, +\infty}{\xi_k} \le \underset{\downarrow\, +\infty}{k+1}$$

$$0 = (y^+)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \Rightarrow y^+ = \cancel{\pm}\frac{\pi}{2}$$

Итого: $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = -\frac{\pi}{2}.$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \frac{\pi}{2}.$$ проверить

7). Интерв. монотонности

а) $y \downarrow$ на $(-\infty, b)$: $b < 0$

$-\operatorname{arctg} b = y(b)$

б). $y \uparrow$ на (b, a) $a > 0$:

$\operatorname{arctg} a = y(a)$

в) $y \downarrow$ на $(a, +\infty)$

$X = a$ — точка локального max (глобального max нет)

$X = b$ — точка локального min (глобального min нет).

(!) Осн. инструмент — нер-во Чаплыгина (Теор. Сравнения)

(верно только для скалярных дифф. уравнений).

Общая схема.

1) $y' = f(x,y)$. если не так, то привести к такому виду.

2) Dom f: $\exists$ (лок. решения) задачи Коши.

(!) 3) единств. решения. (напр., если $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр в окр. нач. точки).

4) Возможные особ. решения ($y = \mathrm{const} = c$ — $f(x,c) = 0$ $\forall x$.) и другие внешне невообр. гладк. решения.

5). Симметрии. (??).

6) Знаки производной (⇒ зоны ↑, ↓) где наход. экстремумы решений.

не дает ∑ еще инф. об. интерв монотонности траектории.

7). Иногда бывает полезно знаки 2й производной (⇒ зоны ∪, ∩).

не дает еще инф об интерв. вып/вогн.

8) Остальное ≡ искусство (!)

Важно: Даже если решение можно записать в виде ф-лы, оно крайне редко бывает выразимо через элементарн. ф-ции (x^α, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, ...)