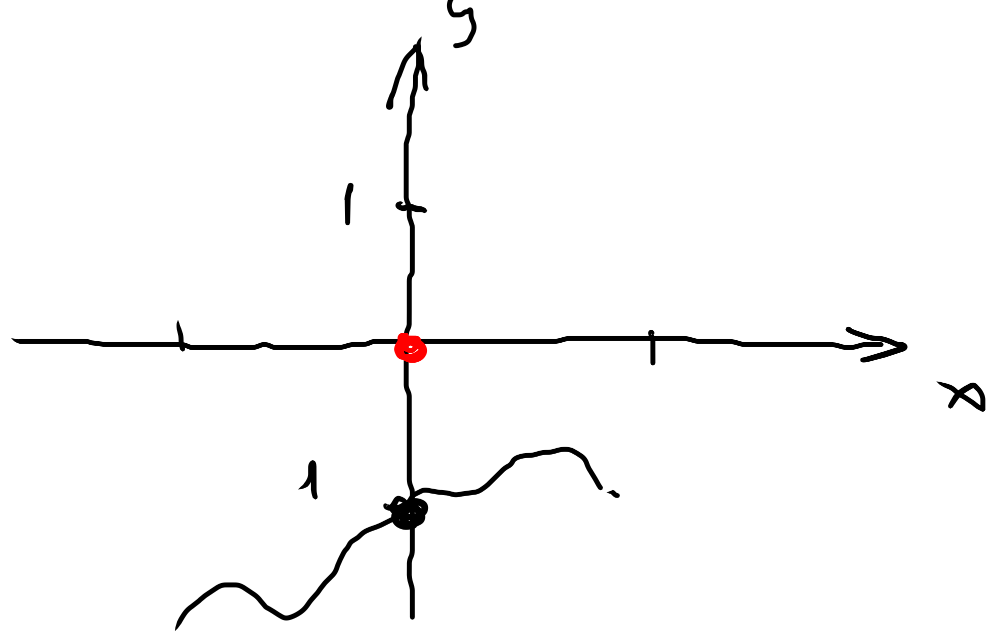
Задача 4 (из листка для подготовки к 1й к/р)

$$\begin{cases} (x-2y)\,y' + x + y = 0. & (1) \\ y(0) = -1. & (1') \end{cases}$$

Решение. $y' = \dfrac{x+y}{2y-x}$ $\quad (2)$

$(2) \not\Leftrightarrow (1)$



$y(1)$

$x - 2y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

1) – лок. существ.

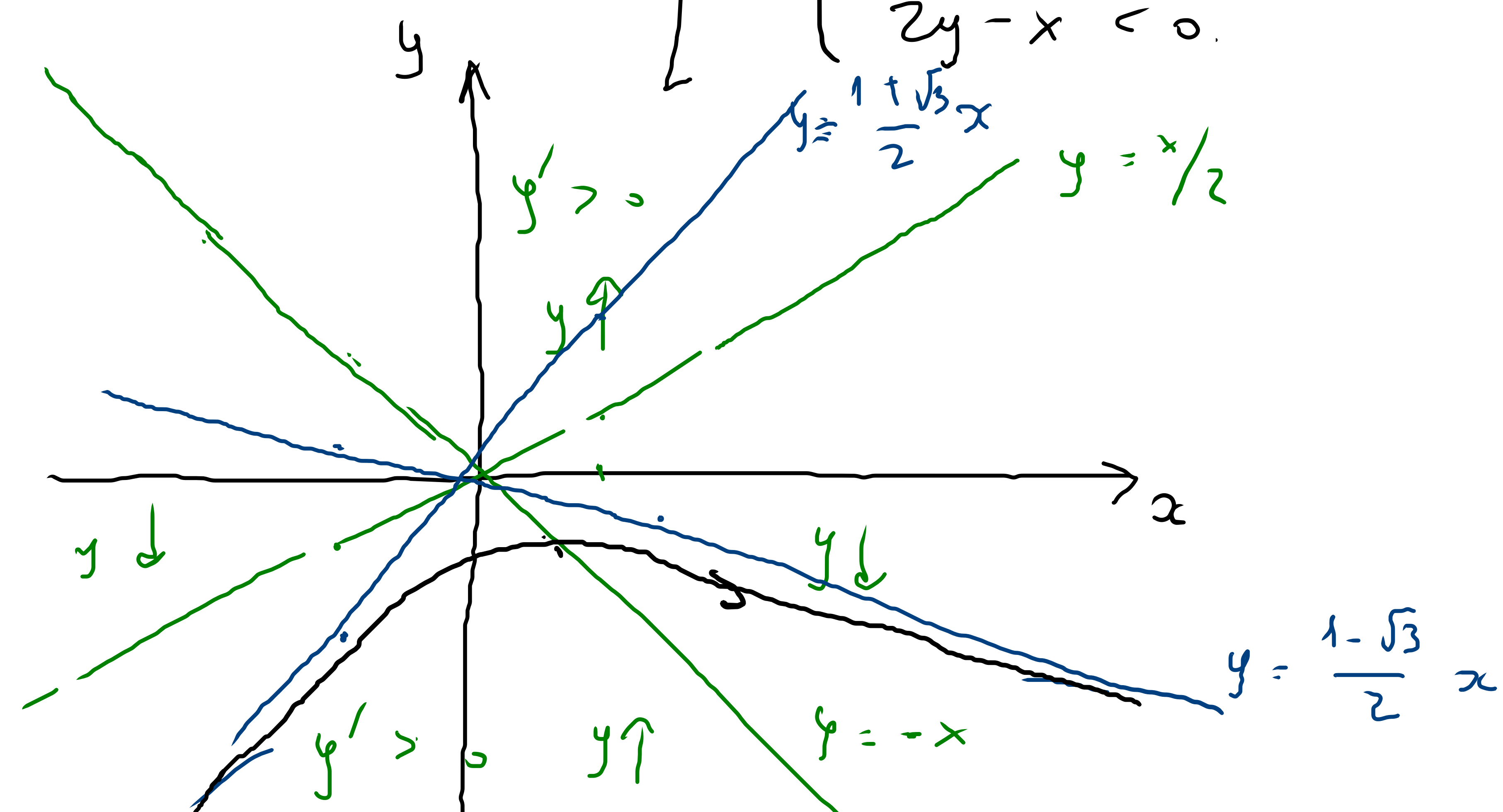
2) – решение единств.

3) Знак производной $\Longrightarrow$ монотонность решения

$$y' = \frac{x+y}{2y-x}$$

$$y' > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y>0 \\ 2y-x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y<0 \\ 2y-x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y>-x \\ y>x/2 \end{cases} \\ \begin{cases} y<-x \\ y<x/2 \end{cases} \end{array}\right.$$



4) Решение опред. на $\mathbb{R}$

Получили (см. след. лист): $y(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+4}$

4) Решение. — однор. ур-е

ур-е в полных дифф.

$u(x) := y(x)/x \Rightarrow$

$y(x) = x\,u(x)$

$y'(x) = u(x) + x\,u'(x)$

$$u + x u' = \frac{1+u}{2u-1}$$

$$u' = \frac{1}{x}\left(\frac{1+u}{2u-1} - u\right)$$

$$(x-2y)y' + (x+y) = 0$$

$$\omega = (x-2y)\,dy + (x+y)\,dx = 0$$

$$d\omega = 1\,dx\wedge dy + 1\,\underbrace{dy\wedge dx}_{= -dx\wedge dy} = 1\,dx\wedge dy - 1\,dx\wedge dy = 0.$$

(форма замкн.).

$$f = f(x,y) : \qquad \omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

(иначе говоря, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x + y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - 2y. \end{cases}$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)$$

$$x - 2y = \frac{\partial f}{\partial y} = x + \varphi'(y) \Longrightarrow \cancel{x} - 2y = \cancel{x} + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = -2y \Rightarrow \varphi(y) = -y^2 + C.$$

Итого: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy - y^2 + C$

Вывод: ур. решения (1), (1') $y = y(x)$ принадлежит линии уровня функции $g(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - y^2$.

$$g(x, y(x)) = C$$

$$-1 = g(0, -1) = C \Rightarrow C = -1.$$

$$\boxed{g(x, y(x)) = -1.}$$

$$y^2 - xy - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) = 0. \iff y = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + 1} =$$

$$= \frac{x}{2} \pm \sqrt{x^2/4 + \frac{x^2}{2} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+4}$$

(!)

Так "$+$" или "$-$" ?

$y(0) = -1.$

$$-1 = y(0) = \frac{0}{2} \cancel{\pm} \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 0+4} = \cancel{\pm}\frac{1}{2}\sqrt{4} = \cancel{\pm}1.$$

Итого: $\boxed{y(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+4}}$

Анализ решения

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{3x^2+4}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$$

$$3x^2+4 = 3x^2 + o(x^2)$$

$$x \to \pm\infty.$$

$$\sqrt{3x^2+4} = \sqrt{3}\,|x| + o(x)$$

$$x \to \pm\infty$$

(!)

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{3}|x|\right) + o(x), \quad x \to \pm\infty$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\,x + o(x), & x \to +\infty \\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\,x + o(x) & x \to -\infty \end{cases}$$

Экстремумы на прямой $y = -x$

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{3x^2+4}\right) = -x.$$

$$x - \sqrt{3x^2+4} = -2x.$$

$$\sqrt{3x^2+4} = 3x$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2+4 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0. \\ 6x^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \cancel{\pm}\sqrt{2/3} \end{cases}$$

$$x = \sqrt{2/3}, \quad y = -\sqrt{2/3}$$

5) y строго возраст. на $\left(-\infty, \sqrt{2/3}\right)$

— " — строго убывает на $\left(\sqrt{2/3}, +\infty\right)$

$\max\limits_{x \in \mathbb{R}} y(x) = -\sqrt{2/3}$, достигается в $x = \sqrt{2/3}$

Линейные ОДУ (и системы).

$$y'(x) = P(x)y(x) + q(x)$$

$\left\{\begin{array}{ll} P(\cdot) & n\times n \text{ матрица} \\ q(\cdot) & n\text{-мерн. вектор.} \end{array}\right.$ — данные

$y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$

1) P, q – непр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ реш. $\exists$, единств., (усл. Коши), опред всюду, где опред $P(\cdot)$ и $q(\cdot)$

2) Однор. ур-е $(q \equiv 0)$

$$y' = P(x)\,y$$

·) Очевидное стаз. решение $y \equiv 0$.

·) Ровно n лин. нез. решений.

3) Однор. лин. система ОДУ с постоянными коэфф.

$P(x) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- решение задачи Коши $\exists$, единств., опред. на $\mathbb{R}$.
- ровно n линейно независимых решений.
- Попробуем выписать решение.

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Пример. $n=1$ $\begin{cases} y' = ay, & a \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = a\int_{x_0}^{x} dx$$

$$y = y_0 e^{a(x-x_0)}$$

Общ. случай $\begin{cases} y' = Ay & y(\cdot) \in \mathbb{R}^n \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$$\boxed{y = e^{A(x-x_0)} y_0}$$

$$e^B := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k = Id + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{6}B^3 + \dots + \frac{1}{k!}B^k + \dots$$

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0$$

Проверим:

→ н.у.: $y(x_0) = e^{A\cdot 0} y_0 = y_0$.

→ $y' = \left(e^{A(x-x_0)} y_0\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x-x_0)^k A^k y_0\right)'$

$=$

$$\underset{\sim}{y}' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{(k-1)}\, A^k y_0 (x-x_0)^{k-1}}{\cancel{k!}\;(k-1)!} =$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} y_0 (x-x_0)^{k-1}}{\underbrace{(k-1)}_{m}!} = A \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m y_0 (x-x_0)^m}{m!}}_{e^{A(x-x_0)} y_0} =$$

$$= A \underbrace{e^{A(x-x_0)} y_0}_{y} = A \underset{\sim}{y}$$

<u>Пример</u>] A – диагонализуема

$$A = TDT^{-1} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$y = e^{A(x-x_0)} y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k y_0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \underbrace{(TD\cancel{T^{-1}})(\cancel{T}D\cancel{T^{-1}}) \ldots (\cancel{T}DT^{-1})}_{k \text{ раз}} y_0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} T D^k T^{-1} y_0 =$$

$$= T \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} D^k \right)}_{e^{D(x-x_0)}} T^{-1} y_0 =$$

$$= T \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \lambda_n^k \end{pmatrix} T^{-1} y_0 =$$

$$= T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 (x-x_0)} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 (x-x_0)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n (x-x_0)} \end{pmatrix} T^{-1} y_0$$

Вообще говоря, A не обязательно диагонализуема.

$$A = T J T^{-1}$$

жордановы клетки.

$$J = \begin{pmatrix} \square & & 0 \\ & \square & \\ 0 & & \square \end{pmatrix}$$

$$\square = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$y = e^{A(x-x_0)} y_0 =$$

$$= T \begin{pmatrix} e^{J_1(x-x_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_n(x-x_0)} \end{pmatrix} T^{-1} y_0 .$$

Д/З: вычислить, как выглядит e^{J}, где J – жорданова клетка.

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}}$$