Семинар 6.

Во всех задачах $\mathbf{k}$ - произвольное поле, A - коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbf{k}$. (Например, $A = \mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$ - кольцо многочленов от n переменных над полем $\mathbf{k}$.) Дифференцированием в A называется линейный оператор $D: \ A \to A$ в A как векторном пространстве, удовлетворяющий правилу Лейбница $D(ab) = D(a)b + aD(b), \ a, b \in A$.

Задача 1. Пусть $A = \mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$. Напомним, что дифференцирование D кольца многочленов $A = \mathbf{k}[t_1, ..., t_n]$, удовлетворяющее условиям $D(t_i) = 1$ и $D(t_j) = 0, \ j \neq i$, называется *частной производной по переменной* t_i и обозначается $\frac{\partial}{\partial t_i}$. Обозначим через $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}$ композицию операторов $\frac{\partial}{\partial t_i} \circ \frac{\partial}{\partial t_j}$. Докажите, что $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial^2}{\partial t_j \partial t_i}$ для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Задача 2. Пусть $F(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{k}[x_1, ..., x_n]$, $u_1(\lambda, \mu, ..., \nu), ..., u_n(\lambda, \mu, ..., \nu) \in \mathbf{k}[\lambda, \mu, ..., \nu]$, и пусть $f(\lambda, \mu, ..., \nu) \equiv F(u_1(\lambda, \mu, ..., \nu), ..., u_n(\lambda, \mu, ..., \nu))$. Докажите, что

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(u_1(\lambda, \mu, ..., \nu), ..., u_n(\lambda, \mu, ..., \nu)) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \lambda}.$$

Задача 3. Пусть $f \in \mathbf{k}[t]$ - многочлен от одной переменной, где $\operatorname{char} \mathbf{k} = 0$. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ в этом случае обозначается также через $\frac{df}{dt}$ или $f'(t)$ и называется просто *(первой) производной* по t, а ее композиция с самой собой k раз называется *k-ой производной* по t и обозначается $\frac{d^k f}{dt^k}$ или $f^{(k)}(t)$. Пусть $\deg f = d$. Докажите формулу Тейлора

$$f = f(t) = f(0) + tf'(t) + \frac{t^2}{2!} f''(t) + ... + \frac{t^d}{d!} f^{(d)}(t). \tag{1}$$

Задача 4. Пусть $a = (a_1, ..., a_n), \ b = (b_1, ..., b_n)$ - векторы в $\mathbf{k}^n$. Для любых $s, t \in \mathbf{k}$ рассмотрим вектор $sa + tb = (sa_1 + tb_1, ..., sa_n + tb_n)$. Пусть $F(x) \equiv F(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{k}[x_1, ..., x_n]$ - *форма* степени d, то есть однородный многочлен степени d. Под $F(sa+tb)$ будем понимать выражение $F(sa_1 + tb_1, ..., sa_n + tb_n)$. Обозначим через $f(t)$ (соответственно, через $g(s)$) это выражение, если в нем фиксировано s (соответственно, фиксировано t).
1) Докажите, что

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=sa} = s^{d-1} \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=a} = s^{d-1} \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) \tag{2}$$

и, соответственно,

$$g'(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=tb} = t^{d-1} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\Big|_{x=b} = t^{d-1} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(b). \tag{3}$$

2) Выведите из (1), (2) и (3) следующие равенства:

$$F(sa + bt) = s^d F(a) + s^{d-1} t F_1(a, b) + s^{d-2} t^2 F_2(a, b) + ... + t^d F_d(a, b), \qquad F_1(a, b) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(a), \tag{4}$$

$$F(sa + bt) = t^d G(b) + t^{d-1} s G_1(a, b) + t^{d-2} s^2 G_2(a, b) + ... + s^d G_d(a, b), \qquad G_1(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(b), \tag{5}$$

где $F_k(a, b)$ и $G_k(a, b)$ - некоторые однородные многочлены степени d от a и b.

Задача 5. В обозначениях предыдущей задачи
1) найдите многочлены $F_2(a, b)$ и $G_2(a, b)$. Напишите общие формулы для многочленов $F_k(a, b)$ и $G_k(a, b)$, $1 \leqslant k \leqslant d$.
2) Как связаны между собой многочлены $F_k(a, b)$ и $G_j(a, b)$?