

Срок сдачи – 1 апреля.

1. Показать, что для уравнения  $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)dt$  определитель Фредгольма  $D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}$ , а минор Фредгольма  $D(x, t; \lambda) = xt$ .

2. Показать, что для уравнения  $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt + t^2)\varphi(t)dt$  имеем

$$D(\lambda) = 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{72}\lambda^2, \quad D(x, t; \lambda) = xt + t^2 + \lambda\left(\frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{3}xt - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{4}t\right).$$

3. Показать, что если  $K(x, t) = f_1(x)f_2(t)$  и  $\int_a^b f_1(t)f_2(t)dt = A$ , то  $D(\lambda) = 1 - \lambda A$ ,  $D(x, t; \lambda) = f_1(x)f_2(t)$ , и решение соответствующего неоднородного интегрального уравнения с правой частью  $f(x)$  имеет вид  $\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - \lambda A} \int_a^b f(t)f_2(t)dt$ .

4. Показать, что если  $K(x, t) = \sum_{m=1}^n f_m(x)g_m(t)$ , то  $D(\lambda)$  будет полиномом  $n$ -степени от  $\lambda$ .

Пользуясь определителями Фредгольма, найти резольвенты следующих ядер:

5.

$$K(x, t) = 2x - t; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

6.

$$K(x, t) = x^2t - xt^2; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

7.

$$K(x, t) = \sin x \cos t; \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

8.

$$K(x, t) = \sin x - \sin t; \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Используя рекуррентные соотношения

$$d_n(x, t) = K(x, t)d_n - n \int_a^b K(x, s)d_{n-1}(s, t)ds,$$

$$d_n = \int_a^b d_{n-1}(s, s)ds,$$

найти резольвенты следующих ядер:

9.

$$K(x, t) = x + t + 1; \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -l \leq t \leq 1.$$

10.

$$K(x, t) = 1 + 3xt; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

11.

$$K(x, t) = 4xt - x^2; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

12.

$$K(x, t) = e^{x-t}; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

13.

$$K(x, t) = \sin(x + t); \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

14.

$$K(x, t) = x - \operatorname{sh} t; \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

С помощью резольвенты решить следующие интегральные уравнения:

15.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\varphi(t)dt = 1.$$

16.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x-t)\varphi(t)dt = \frac{x}{6}.$$

17.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t)dt = \cos 2x.$$

18.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt = e^x.$$

19.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (4xt - x^2)\varphi(t)dt = x.$$