Нагрев стержня. $u = u(t,x)$, $x \in (0,l)$, $t > 0$

$$(*) \quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

ур-е теплопроводности

$$(1) \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\left(a^2 k^2 \pi^2 / l^2\right) t} \sin \frac{k \pi x}{l}$$

Th. (1) — ~~дает~~ единств. классическое решение $(*)$, если

$u_0(0) = u_0(l) = 0$,

$\underbrace{u_0 \text{ — абс. непр. на } [0,l], \ u_0' \in L^2(0,l)}$ $H_0^1(0,l)$

Д-во единственности (остальное уже сделано).

$\exists\ u_1, u_2$ — решения задачи $(*)$

Рассм. $u := u_1 - u_2$. $\qquad u \in C([0, \overset{T>0}{T}] \times [0, l])$

$$(2) \quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = 0. \end{cases}$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$(6) \quad \int_0^l u_t(t,x) \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_0^l u(t,x) \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx}_{= c_k\, l/2} = c_k' \frac{l}{2} =

•) $\displaystyle\int_0^l u_{xx}(t,x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \cancel{u_x \sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l} - \frac{k\pi}{l}\int_0^l u_x \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx =$

$$= -\frac{k\pi}{l}\left(\cancel{u\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l} + \frac{k\pi}{l}\int_0^l u\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{k^2\pi^2}{l^2}\underbrace{\int_0^l u\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx}_{c_k\cdot\frac{l}{2}} = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}\,\frac{l}{2}\,c_k(t).$$

Ug sono resta:

$$0 = \int_0^l \left(u_t - a^2 u_{xx}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \cancel{\frac{l}{2}}\,c_k' + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\,\cancel{\frac{l}{2}}\,c_k$$

$$\begin{cases} c_k' + \dfrac{k^2\pi^2}{\ell^2} c_k = 0 & \text{για } (0,T). \quad (\forall k.) \\ c_k(0) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell} \\ 0 = u(0,x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) \sin\frac{k\pi x}{\ell} \end{aligned}}$$

$$c_k(t) = \alpha_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} t}$$

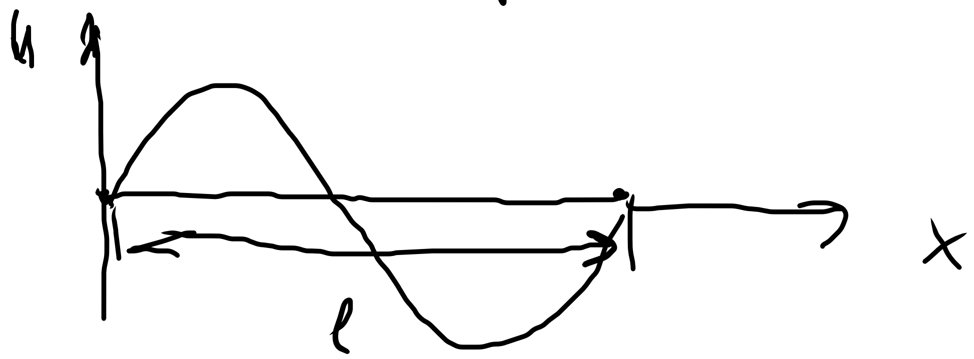
$$0 = c_k(0) = \alpha_k$$

$$\Rightarrow \quad c_k(t) = 0, \quad \forall t \in [0,T)$$

$$u(t,x) = 0, \quad \text{για } (0,T) \times [0,\ell]$$

ζ.τ.δ.

Колебания струн. (свободные)



$$u = u(t, x)$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = V_0(x) \end{cases}$$

для простоты рассм. сл. $V_0 \equiv 0$

Форм. решение: $u(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{ak\pi}{l} t \sin \frac{k\pi x}{l}$

(для случая $V_0 \equiv 0$).

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Когда это классич. решение?

(Сл. $v_0 \equiv 0$)

Th. Это классич. решение (причем единств.), если $u_0(0) = u_0(l) = 0$,

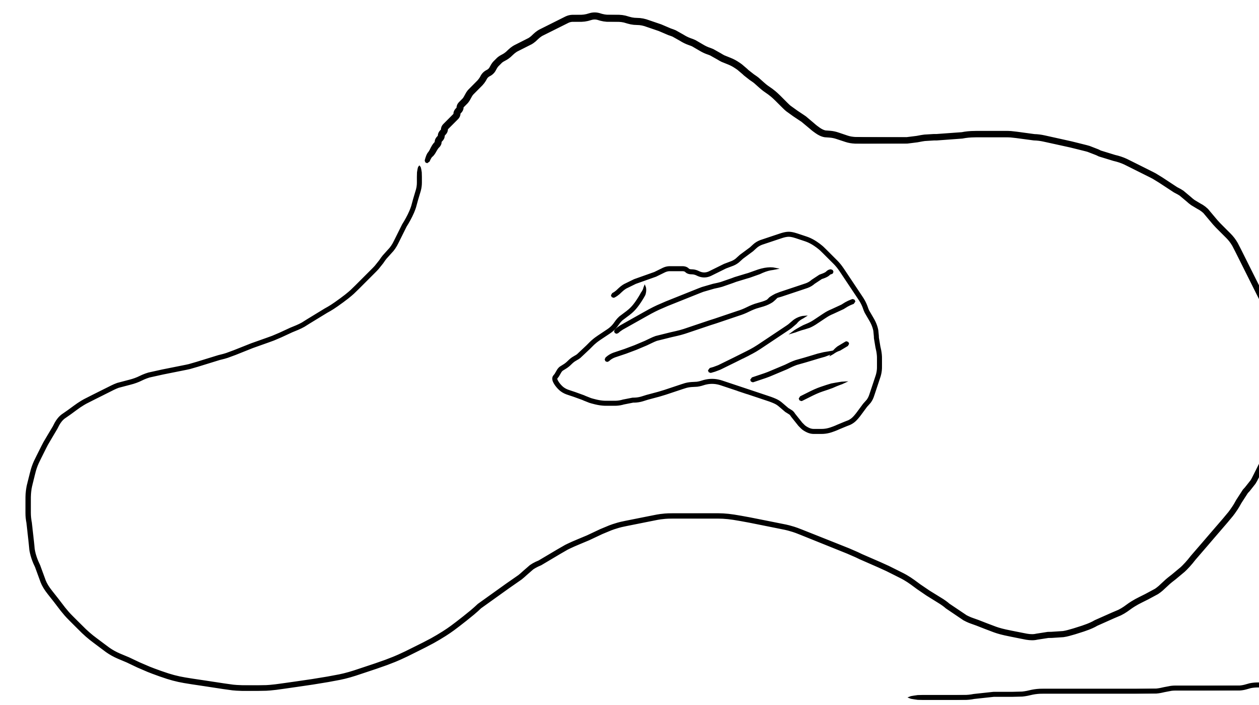
а $u_0 \in C^2[0,l]$, и u_0'' — абс. непр.;

причем $u_0''' \in L^2(0,l)$

Обобщенные функции (распределения) и обобщенные (слабые) решения Д. У.

С. Л. Соболев, Л. Шварц.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открытое



$\operatorname{supp} u = \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$

а) $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

основные (пробные) функции

б). $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\quad \varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$, если

1). $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K \subset \Omega$

компакт.

2). $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$.

$D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

Пример. 1). $\Omega = \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \varphi(x)$

$\varphi_k(x) \underset{k \to \infty}{\rightrightarrows} 0$ $\Big\}$ $\varphi_k \xrightarrow[k \to \infty]{\mathcal{D}(\Omega)} 0$ да!

2). $\Omega = \mathbb{R}$ $\qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\varphi_k(x) := \varphi(x-k)$$

$$\varphi_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad \Big| \qquad \varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}(\Omega)} 0 \quad \text{нет!!}$$

3). $$\varphi_k(x) := \frac{1}{k}\varphi(x-k)$$

$$\varphi_k \rightrightarrows 0 \qquad \varphi_k^{(m)} \rightrightarrows 0 \quad \forall m,$$

но $\varphi_k \not\to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$

•). $\mathcal{D}'(\Omega)$ – множество лин. непр. функционалов на $\mathcal{D}(\Omega)$.

мн-во обобщенных функций (распределений).

$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

лин. непр.

$\langle \varphi , u \rangle$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \Rightarrow \lim\limits_{k} \langle \varphi_k , u \rangle = \langle \varphi , u \rangle$

$\langle \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 , u \rangle = \alpha_1 \langle \varphi_1 , u \rangle + \alpha_2 \langle \varphi_2 , u \rangle$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Примеры обобщ. ф-ций.

1°) $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

$\mapsto \cancel{\tilde{u}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle \underset{\mathcal{D}(\Omega)}{\varphi}, \cancel{\tilde{u}} \rangle := \int_\Omega \varphi(x)\, u(x)\, dx$$

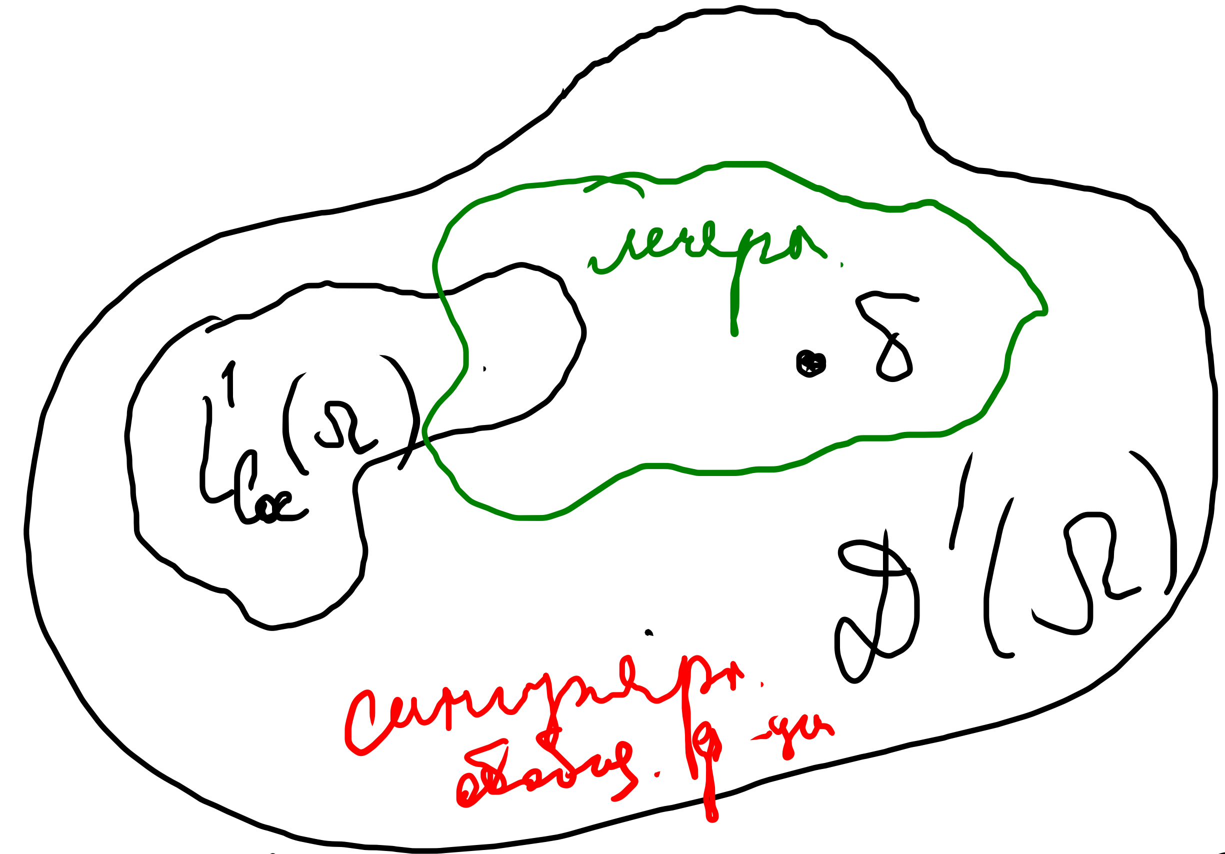
Проверим непр-сть (линейность очевидна):

$$\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \Rightarrow \langle \varphi_k, \tilde{u} \rangle = \int_{\cancel{\Omega}\; K} \varphi_k(x)\, u(x)\, dx \to$$

$$\to \int_K \varphi(x)\, u(x)\, dx = \int_\Omega \varphi(x)\, u(x)\, dx = \langle \varphi, \tilde{u} \rangle$$

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

регулярные обобщ. ф-ции



2°) μ — конечн. положит. борелевская мера на Ω.

$$\langle \varphi, \mu \rangle := \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x)$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\boxed{3^\circ}$ $\Omega = \mathbb{R}^n$

$$\langle \varphi, \delta \rangle := \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \qquad \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

ф-я Дирака

Любопытно: $\exists$ ли $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \varphi, \delta \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, u(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Ответ: НЕТ(!)

Д-во: Пусть $\exists\, u$: $\langle \varphi, \delta \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u \varphi \, dx$

$\quad\;\;\, \overset{\|}{\varphi(0)}$

а) Если $\operatorname{supp} \varphi \not\ni 0$ тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) \varphi(x) \, dx = 0. \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

$\Rightarrow u(x) = 0$ п.в. на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

(!) Лм (Du Bois-Reimond) (осн. лемма вариац. исчисления).

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\int_\Omega u(x) \varphi(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$\Longrightarrow u(x) = 0$ п.в. $x \in \Omega$

$u(x)=0$ п.в. $x\in\mathbb{R}^n \Longrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,\varphi(x)\,dx=0$

$$\underset{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}{\langle \underset{\cap}{\varphi}, u\rangle} = 0 \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

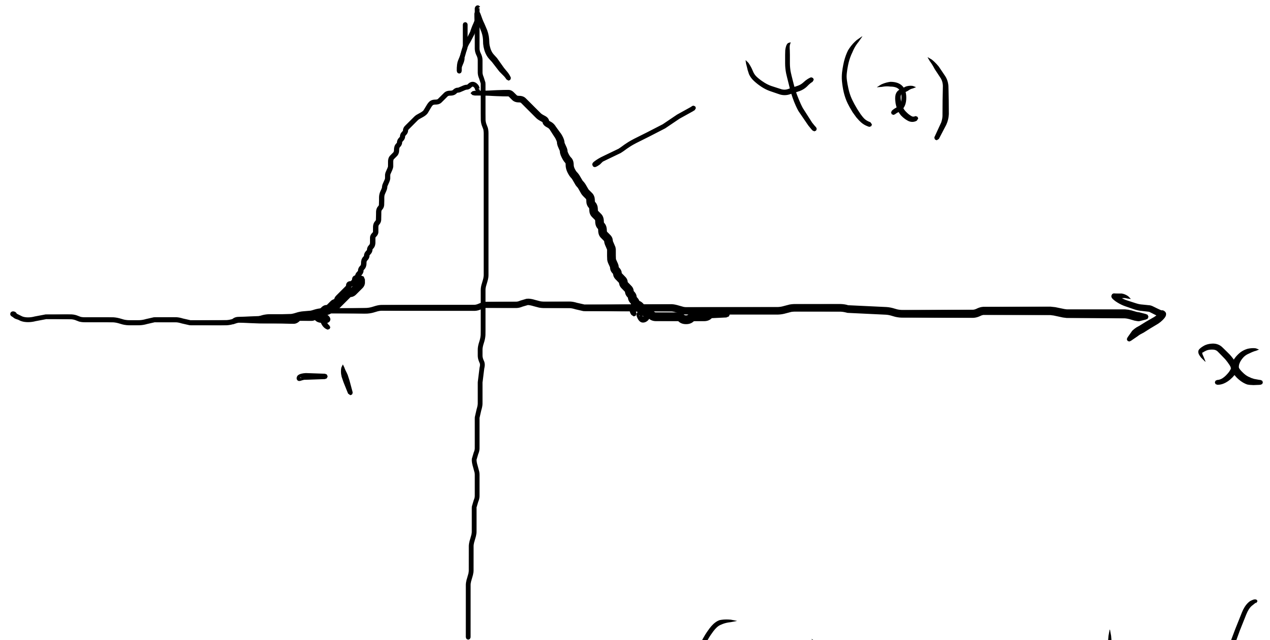
◦). Дост. предъявить $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: $\langle\varphi, u\rangle = \varphi(0)\neq 0$;

чтобы получить противоречие.

Предъявим такую φ:

1) $\varphi(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & x\in(-1,1)\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

проверить $\longrightarrow$ $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$



"шапочка"

2) $\varphi(x) = \psi(|x|)$ $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$(\mathrm{supp}\,\varphi = \overline{B_1(0)})$

$\varphi(0) = \psi(0) = e \neq 0.$ —

— противоречие.

Упражнение. что $\underset{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}{\langle \varphi, \delta \rangle} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\delta(x)$

мера Дирака. (точечн. заряд).

$$\delta(B) := \begin{cases} 1, & 0 \in B \\ 0, & 0 \notin B \end{cases}$$

мера

Д/З: проверить.