Группы Ли II 2021
Задачи к четвертому занятию

Задача 1. Для группы $SL(2,\mathbb{C})$ опишите

a) максимальную компактную подгруппу и гомотопический тип;
b) разложения Гаусса и Ивасава;
c) размерность, алгебру Ли и правоинвариантные векторные поля [1]

Задача 2. Естественное действие $h \to ghg^*$ группы $G = SL(2,\mathbb{C})$ на эрмитовых матрицах определяет гомоморфизм G в собственную группу Лоренца $SO_0(1,3)$.

a) Объясните этот факт
b) покажите, что $SO_0(1,3) \approx SL(2,\mathbb{C})/\pm 1$;
c) опишите этот гомоморфизм на уровне алгебр Ли

Задача 3. Собственная группа Лоренца сохраняет в четырехмерном пространстве Минковского верхнюю полу двуполостного гиперболоида, световой конус и однополостный гиперболоид. Опишите эти поверхности как однородные пространства

a) группы $SO_0(1,3)$;
b) группы $SL(2,\mathbb{C})$.

Задача 4. a) Опишите все неприводимые конечномерные представления π_χ группы $\mathbb{C}^*$ (группа отличных от нуля комплексных чисел по умножению). Они должны нумероваться парой $\chi = (\sigma, n)$, где $\sigma \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$, либо парой $\chi = (\sigma_1, \sigma_2)$ комплексных чисел, разность которых целочисленна.

b) Всякое неприводимое конечномерное представление π_χ группы $\mathbb{C}^*$ определяет неприводимое представление $\bar{\pi}_\chi$ группы B комплексных верхнетреугольный матриц $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ с определителем 1. Опишите это представление

c) * Докажите, что описанные в предыдущем пункте представления исчерпывают все неприводимые конечномерные представления группы B

Задача 5. a) Представление D_χ основной серии группы $SL(2,\mathbb{C})$ определяется как индуцированное с неприводимог представления $\bar{\pi}_\chi$ подгруппы верхнетреугольных матриц. Реализуйте его в функциях одной комплексной переменной.

b) Другой способ описать представления D_χ аналогичен исходному описанию представления основной серии группы $SL(2,\mathbb{R})$ и состоит из ограничения естественного действия группы $SL(2,\mathbb{C})$ на функциях двух комплексных переменных на подпространство функций данной степени однородности,

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{\sigma_1} \bar{\lambda}^{\sigma_2} f(z_1, z_2), \qquad \sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z}$$

Реализуйте его в функциях одной комплексной переменной. Опишите асимптотические условия на соответствующие функции одной комплексной переменной.

c) Опишите действие алгебры Ли $sl(2,\mathbb{C})$ в D_χ

---

[1] Учитывая то, что все рассмативаемые функции - комплекснозначные, всюду в дальнейшем удобно использовать вместо координат x, y на плоскости координаты z и $\bar{z}$