

Группы Ли II 2021
Задачи ко третьему занятию

Задача 1. Вычислите действие образующих e, h, f алгебры Ли $sl(2, \mathbb{R})$ в представлении D_χ основной серии

Задача 2. Для всякого $\chi = (s \in \mathbb{C}, \varepsilon = 0, 1)$ отождествите представление D_χ основной серии группы $G = SL(2, \mathbb{R})$ с индуцированным представлением $\text{Ind}_B^G \pi_\chi$. Здесь B – подгруппа верхнетреугольных матриц, π_χ – одномерное представление B ,

$$\pi_\chi \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = |\lambda|^{s-1} \text{sgn } \lambda^\varepsilon.$$

Задача 3. Отождествим открытый единичный диск D с однородным пространством $SU(1, 1)/U(1) \simeq SU(1, 1)/SO(2, \mathbb{R})$.

- а) Опишите действие и орбиты подгруппы диагональных матриц
- б) Опишите действие и орбиты подгрупп матриц вида $\begin{pmatrix} \text{ch } \tau & \text{sh } \tau \\ \text{sh } \tau & \text{ch } \tau \end{pmatrix}$;

Задача 4. Покажите, что

- а) действие $SU(1, 1)$ на D сохраняет метрику $\frac{dzd\bar{z}}{(1-|z|^2)^2} = \frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$;
- б) действие $SL(2, \mathbb{R})$ на верхней полуплоскости H сохраняет метрику $\frac{dzd\bar{z}}{\text{Im}^2 z}$;

Задача 5. Вычислите расстояние от начала координат до точки $(0, r)$ в метрике диска Пуанкаре

Задача 6. Покажите, что интервал $I = (-1, 1)$ в диске Пуанкаре является орбитой подгруппы $SU(1, 1)$, состоящей из матриц вида $A(\tau) = \begin{pmatrix} \text{ch } \tau & \text{sh } \tau \\ \text{sh } \tau & \text{ch } \tau \end{pmatrix}$ и τ является на нем натуральным параметром, т.е., если $x = A(\tau)y$ для двух точек $x, y \in I$, то расстояние между x и y равно $|\tau|$.