Группы Ли II 2021
Задачи к восьмому занятию

***Задача* 1.** Автоморфизм Картана θ алгебры Ли $\mathbf{g} = su(1, n-1)$ совпадает с сопряжением диагональной матрицей $I = -e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn}$

a) Покажите, что елемент $a = e_{1n} + e_{n1}$ порождает в подпространстве $\mathbf{p} = \{x \in \mathbf{g}, \theta(x) = -x\}$ максимальную коммутативную подалгебру $\mathbf{a}$

b) опишите корневое разложение $\mathbf{g}$ по отношению к присоединенному представлению $\mathbf{a}$. Изобразите в одномерном пространстве $\mathbf{a}^*$ корни и их кратности

c) Опишите максимальную компактную подгруппу K и разложение Ивасава группы $G = SU(1, n-1)$;

d) Фактор G/K - симметрическое пространство. Опишите его геометрически.

***Задача* 2.** Вещественная группа $G = SU^*(2n)$ (иногда по недоразумению обозначаемая $SL(n, \mathbb{H})$) определяется как пересечение групп $SL(2n, \mathbb{C})$ и $GL(n, \mathbb{H})$, где $\mathbb{H}$ - тело кватернионов.

a) Опишите явно матричную структуру G и алгебры Ли $\mathbf{g}$

b) Найдите антилинейную инволюцию, выделяющую G в $SL(2n, \mathbb{C})$ и $\mathbf{g}$ в $sl(2n, \mathbb{C})$; опишите инволюцию Картана θ

c) * опишите максимальную компактную подгруппу $K \subset G$; покажите, что она может быть отождествлена с группой $Sp(n, \mathbb{R})$ комплексных унитарных $2n \times 2n$ матриц, сохраняющих невырожденную линейную симплектическую форму

***Задача* 3.**

a) Грассманиан $G^{\mathbb{R}}(k, n)$ k-мерных плоскостей в вещественном n-мерном пространстве может быть реализован как однородное пространство $GL(n, \mathbb{R})/P_{k,n-k}$, где $P_{k,n-k}$ - подгруппа блочно-треугольных матриц с блоками размеров k и $n-k$. Объясните этот факт;

b) этот же грассманиан может быть реализован как однородное пространство $O(n)/O(k) \times O(n-k)$;

c) докажите, что $G^{\mathbb{R}}(k, n)$ - компактное симметрическое пространство. Опишите геометрически отражение в каждой его точке

d) * опишите явно соответствующую инвариантную риманову метрику, например, на $\mathbb{RP}^1$ в аффинной карте.

***Задача* 4.** Пространство P_n положительно определенных симметрических матриц является однородным пространством относительно группы $GL(n, \mathbb{R})$.

a) Покажите, что P_n - некомпактное симметрическое пространство. Отождествите его с соответствующей факторгруппой

b) опишите явно отражение в каждой точке

c) * Формула $(v, w)_p = \mathrm{Tr}\ vp^{-1}wp^{-1}$ задает инвариантную риманову метрику на P_n. Здесь матрицы v и u рассматриваются как элементы касательного пространства в точке $p \in P$.