Группы Ли II 2021
Задачи к седьмому занятию

***Задача* 1.** Задача 2 прошлого семинара

***Задача* 2.** Докажите следующие свойства формы Киллинга $B_{\mathbf{g}}(\, , \,)$:

a) если $\mathbf{g}_0 \subset \mathbf{g}$ - идеал в алгебре Ли $\mathbf{g}$ (т.е., $[\mathbf{g}, \mathbf{g}_0] \subset \mathbf{g}_0$), то ограничение $B_{\mathbf{g}}|_{\mathbf{g}_0}$ совпадает с $B_{\mathbf{g}_0}$

b) если $\mathbf{g}_0$ – вещественная форма комплексной алгебры $\mathbf{g}$, то ограничение комплекснозначной формы Киллинга $B_{\mathbf{g}}$ на $\mathbf{g}_0$ вещественно и совпадает с формой Киллинга $B_{\mathbf{g}_0}$;

c) (Вещественная) форма Киллинга полупростой комплексной алгебры Ли невырождена и имеет нулевую сигнатуру.

Пусть $\mathbf{g}$ - вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли $\bar{\mathbf{g}}$, $\sigma : \bar{\mathbf{g}} \to \bar{\mathbf{g}}$ - выделяющая ее антилинейная инволюция; $\mathbf{u}$ - компактная вещественная форма $\bar{\mathbf{g}}$, состоящая из неподвижных точек антилинейной инволюции $\tau : \bar{\mathbf{g}} \to \bar{\mathbf{g}}$ и пусть $\tau\sigma = \sigma\tau$. В этой ситуации линейная инволюция Картана $\theta = \sigma\tau$ сохраняет $\mathbf{g}$ и определяет в ней разложение Картана

$$\mathbf{g} = \mathbf{k} + \mathbf{p}, \qquad \text{где} \qquad \mathbf{k} = \{x \in \mathbf{g} | \theta(x) = x\}, \qquad \mathbf{p} = \{x \in \mathbf{g} | \theta(x) = -x\}$$

и положительно определенную форму $B_\theta(x, y) = -B(x, \theta y)$ на $\mathbf{g}$.

***Задача* 3.** a) Покажите, что операторы ad_x кососимметричны относительно формы B_θ для $x \in \mathbf{k}$ и симметричны для $x \in \mathbf{p}$

b) алгебра Ли $\mathbf{k}$ - максимальная компактная подалгебра $\mathbf{g}$.

***Задача* 4.** a) Покажите, что алгебра Ли $u(p, q)$ [1] есть вещественная форма комплексной алгебры Ли $gl(p + q, \mathbb{C})$.

b) Опишите соответствующую антилинейную инволюцию $gl(p + q, \mathbb{C})$, совместимую с ней компактную форму и инволюцию Картана

c) Опишите максимальную компактную подгруппу K группы $G = U(p, q)$.

***Задача* 5.** Группа $\mathbb{C}^* \sim GL(1, \mathbb{C})$ может быть описана как подгруппа группы невырожденных вещественных 2×2 матриц, коммутирующих с оператором I умножения на i, т.е., матриц вида $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\det A \neq 0$.

a) Обобщите это утверждение на $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $sl(n, \mathbb{C})$

b) Опишите группы и алгебры Ли $GL(1, \mathbb{H})$, $SL(2, \mathbb{H})$, $sl(2, \mathbb{H})$ как матричные группы и алгебры Ли (т.е., подгруппы или подалгебры Ли некоторых $GL(n, \mathbb{C})$ или $gl(n, \mathbb{C})$). Здесь $\mathbb{H}$ - тело кватернионов.

[1] т.е. алгебра Ли группы, сохраняющей форму $x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_p\bar{y}_p - x_{p+1}\bar{y}_{p+1} - \ldots - x_{p+q}\bar{y}_{p+q}$