Группы Ли II 2021
Задачи к шестому занятию

***Задача* 1.** Выразите дельта функцию на группе и значение $f(e)$ для $f \in C_0^\infty(G)$ через явно вычисленные характеры неприводимых унитарных представлений для групп

a) S^1,
b) $\mathbb{Z}$,
c) $\mathbb{R}$,
d) * $SU(2)$.

Объясните смысл и доказательство первых трех равенств в терминах классической теории рядов и интегралов Фурье. Опишите меру Планшереля на множестве $\hat{G}$ и разложение $L_2(G)$ по неприводимым представлениям G.

***Задача* 2.** * По определению, представления дискретной серии группы G - это представления, реализуемые в замкнутых линейных подпространствах $L_2(G)$ (эквивалентно, прямые слагаемые $L_2(G)$). Тем самым, они описываются квадратично интегрируемыми функциями на группе. Покажите, что представление F_n^+ голоморфной дискретной серии группы $SU(1,1)$ можно реализовать в подпространстве, порожденном функциями $\alpha^{-n-p-1}\beta^p,\ p = 0, 1, ...$ Инвариантная форма объема на группе $SU(1,1)$ может быть описана формулой

$$d\alpha \wedge d\bar{\alpha} \wedge \left(\frac{d\beta}{\beta} - \frac{d\bar{\beta}}{\bar{\beta}}\right) = d\alpha \wedge d\bar{\alpha} \wedge d\log\frac{\beta}{\bar{\beta}}$$

либо аналогичной с заменой α на β и наоборот.

***Задача* 3.** Форма Киллинга $B(x,y)$ на вещественной алгебра Ли $\mathbf{g}$ определяется формулой

$$B(x,y) = Tr_{\mathbf{g}}\, \mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y$$

где $\mathrm{ad}_x : \ \mathbf{g} \to \mathbf{g}$ - оператор присоединенного действия элемента x, $\mathrm{ad}_x(y) = [x,y]$. Вычислите форму Киллинга на

a) $so(3)$, $su(2)$,
b) $sl(2,\mathbb{R})$,
c) $sl(2,\mathbb{C})$,
d) алгебре Ли группы движений плоскости (ее размерность равна трем).

Опишите инванианты: ранг и сигнатуру в каждом случае.

***Задача* 4.** Вещественная алгебра Ли $\mathbf{q}$ называется вещественной формой комплексной алгебры Ли $\mathbf{g}$, если $\mathbf{q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ и $\mathbf{g}$ изоморфны как комплексные алгебры Ли[1]. Покажите, что $\mathbf{q}$ является вещественной формой $\mathbf{g}$ тогда и только тогда, когда существует антилинейная инволюция[2] $\eta : \ \mathbf{g} \to \mathbf{g}$, так что алгебра Ли неподвижных точек η изоморфна $\mathbf{q}$.

***Задача* 5.** a) Определите тип комплексификации алгебр Ли $su(2)$, $sl(2,\mathbb{R})$, $sl(2,\mathbb{C})$.
b) В каждом случае выпишите антилинейную инволюцию в комплексификации, выделяющую данную вещественную форму.
c) Какие вещественные формы алгебры Ли $sl(3,\mathbb{C})$ вы можете назвать?

---

[1] Соответственно, можно называть $\mathbf{g}$ комплексной формой $\mathbf{q}$
[2] $\eta([x,y]) = [\eta(x), \eta(y)],\ \eta(\lambda x) = \bar{\lambda}\eta(x),\ \eta^2 = 1$