**Группы Ли II 2021**
**Задачи к пятому занятию**

***Задача* 1.** Представление $F_n^+$, $n = 1, 2, ...$ дискретной серии группы $SU(1,1)$ реализуется в пространстве аналитических функций в круге $|w| < 1$ с действием

$$T_g f(w) = (\bar{\beta} w + \bar{\alpha})^{-n-1} f\left(\frac{\alpha w + \beta}{\bar{\beta} w + \bar{\alpha}}\right), \qquad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

a) Покажите, что скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \frac{i}{2} \int_{D=\{|w|<1\}} \varphi(w) \bar{\psi}(w) (1 - w\bar{w})^{n-1} dw \wedge d\bar{w}$$

инвариантно относительно этого действия

b) Пополнение $\bar{F}_n^+$ пространства $F_n^+$, относительно топологии, задаваемой этим скалярным произведением, состоит из аналитических в $D$ функций $\varphi(w)$, для которых $i \int_D \varphi(w) \bar{\psi}(w) (1 - w\bar{w})^{n-1} dw \wedge d\bar{w} < \infty$

***Задача* 2.** Ортогонализуйте в $\bar{F}_n^+$ последовательность $w^n$. Это полная ортогональная система. Пусть $\{\varphi_n(w)\}$ соответствующий ортонормированный базис. Вычислите $K(w, \xi) = \sum_n \varphi_n(w) \bar{\varphi}_n(\xi)$ Покажите, что $K(w, \xi)$ - воспроизводящее ядро, т.е., для любой функции $f(w) \in \bar{F}_n^+$

$$f(w) = \frac{i}{2} \int_D K(w, \xi) f(\xi) (1 - \xi\bar{\xi})^{n-1} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

***Задача* 3.** Пусть $G$- конечная группа, $\delta(g)$ - функция на группе (по-другому, элемент группового кольца), такая, что $\delta(g) = 0$ если $g \neq e$ и $\delta(e) = 1$. Покажите, что

a) $\delta(g) = \dfrac{1}{|G|} \sum\limits_{V \in \hat{G}} \dim V \cdot \chi_V(g) = \dfrac{1}{|G|} \sum\limits_{V \in \hat{G}} \dim V \cdot \mathrm{Tr}_V(T_g^V).$

Здесь $\hat{G}$ - множество классов эквивалентностей неприводимых (унитарных) конечномерных представлений $G$, $g \to T_g^V \in \mathrm{End}\, V$; $\chi_V(g) = \mathrm{Tr}_V(T_g^V)$ - характер представления $V$.

b) $f(g) = \sum_{V \in \hat{G}} \frac{\dim V}{|G|} \mathrm{Tr}_V(T^V(f) T_{g^{-1}}^V)$. Здесь $T^V(f) = \sum_{g \in G} f(g) T_g^V$ - ассоциированное с $V$ представление группового кольца

***Задача* 4.** Пусть $\mathbf{g}$ - алгебра Ли комплексной алгебраической группы (например, $SL(n, \mathbb{C})$). Докажите, что $\mathbf{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \sim \mathbf{g}' \oplus \mathbf{g}'$[1]. Здесь $\mathbf{g}'$ означает алгебру $\mathbf{g}$, рассматриваемую как алгебру Ли над $\mathbb{C}$.

***Задача* 5.** (переформулировка задачи 5 прошлого семинара)

a) Представления $D_\chi$, $\chi = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z}$ основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$ определяются как индуцированные с неприводимых представлений подгруппы верхнетреугольных матриц. Покажите, что в координатах $z, \bar{z}$ его можно реализовать в пространстве гладких функций на плоскости с действием

$$T_g f(z, \bar{z}) = (bz + d)^{\sigma_1} (\bar{b}\bar{z} + \bar{d})^{\sigma_2} f\left(\frac{az + c}{bz + d}, \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{c}}{\bar{b}\bar{z} + \bar{d}}\right), \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Каковы асимптотические условия на эти функции?

b) Выпишите действие комплексифицированной алгебры Ли в $D_\chi$

[1] Правильный ответ: $\mathbf{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \sim \mathbf{g}' \oplus \bar{\mathbf{g}}'$