

**Группы Ли II 2021**  
**Задачи ко второму занятию**

**Задача 1.** Выведите свойства ортогональности характеров  $\chi_V(g) = \text{tr}_V T_g$  неприводимых представлений компактной группы Ли из свойств ортогональности матричных элементов

**Задача 2.** а) В задаче 4 прошлого семинара рассматривалось отображение группы  $SU(2)$  в группу  $SO(3)$ . Алгебра Ли  $su(2)$  состоит из косоэрмитовых бесследовых  $2 \times 2$  матриц; алгебра Ли  $so(3)$  – из кососимметрических  $3 \times 3$  матриц. Опишите соответствующий гомоморфизм алгебр Ли.

б) Сфера  $S^2$  является однородным многообразием  $SU(2)/SU(1)$ . Объясните это. Как связаны в этом контексте сферические координаты с углами Эйлера на  $SU(2)$ ?

**Задача 3.** Пусть  $V_l$  – конечномерное представление группы Ли  $SL(2, \mathbb{C})$  в  $2l + 1$ -мерном комплексном пространстве  $V_l$ . Ограничим его на  $SL(2, \mathbb{R})$ .

а) Существует ли на  $V_l$  эрмитова форма, инвариантная относительно действия  $SL(2, \mathbb{R})$ ?

б) существуют ли другие полуторалинейные  $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантные симметричные формы? Опишите их для  $l = 1/2, 1$ .

**Задача 4.** Вектором Уиттекера назовем элемент  $v \in V$  представления алгебры Ли  $sl(2)$  в пространстве  $V$  такой, что  $ev = v$ ; дуальным вектором Уиттекера  $v'$  назовем элемент  $\xi \in V'$  дуального пространства такой, что  $\xi f = -f$ . ( $e, f, h$  – стандартный базис  $sl(2)$ ).

а) Выведите дифференциальное уравнение на функцию Уиттекера  $w(t)$ , представленную матричным элементом

$$w(t) = (\xi, e^{th}v)$$

считая, что элемент Казимира  $L = ef + fe + \frac{h^2}{2}$  действует на  $V$  умножением на скаляр  $\alpha = 2l(l + 1)$ .

б) Аналогичный вопрос про матричный элемент

$$u(t) = (\eta, e^{th}v)$$

где  $\eta$  характеризуется условием  $\eta(e - f) = 0$ .

**Задача 5.** а) Всякая группа Ли размерности  $n$  обладает  $n$  линейно независимыми левоинвариантными векторными полями,  $n$  линейно независимыми правоинвариантными векторными полями. То же относится к 1-формам. Объясните этот факт

б) Выпишите явно левоинвариантные векторные поля и 1-формы для  $SL(2, \mathbb{R})$  и  $SL(2, \mathbb{C})$

в) Выпишите явно левоинвариантные 1-формы для  $SU(2)$

**Задача 6.** а) Выпишите в каком либо виде инвариантную внешнюю форму старшей степени на  $SU(2)$

б) Решите задачу 7 прошлого семинара