Группы Ли II 2021
Задачи к первому занятию

***Задача* 1.**

a) Приведите пример группы и ее не вполне приводимого представления
b) Приведите пример группы и левоинвариантной меры на ней, не являющейся правоинвариантной

***Задача* 2.**

a) Сформулируйте аналоги свойств 0)-5) компактных групп для конечных групп
b) Докажите сформулированные свойства

***Задача* 3.** Докажите правоинвариантность левоинвариантной меры Хаара на компактной группе

***Задача* 4.**

a) Естественное действие группы $SU(2)$ на эрмитовых бесследовых матрицах определяет гоморфизм группы $SU(2)$ в группу $SO(3)$ с ядром $\pm E$ (E - единичная матрица). Докажите.
b) Группа $SO(3)$ состоит из вращений $\mathbb{R}^3$ вокруг некоторой оси на некоторый угол. Объясните геометрически, во что переходит при этом гомоморфизме параметризация $SU(2)$ углами Эйлера

***Задача* 5.** Выведите дифференциальное уравнение на присоединенные функции Лежандра, т.е., на матричные коэффициенты

$$\langle l0|e^{\theta J_2}|ln\rangle$$

***Задача* 6.** Вычислите непосредствено матричный коэффициент

$$\langle ll|e^{\theta J_2}|ll\rangle$$

для $l = 0, 1/2, 1$. Для произвольного полуцелого l?

***Задача* 7.** Проверьте непосредственно инвариантность формы объема

$$\omega = \sin\theta d\phi \wedge d\theta \wedge d\psi$$

относительно левых и правых сдвигов на группе $SU(2)$. Здесь ϕ, ψ и θ - углы Эйлера в факторизации группового элемента

$$g = e^{\varphi J_3} e^{\theta J_2} e^{\psi J_3}, \qquad J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$