Группы Ли II 2021
Задачи к девятому занятию

***Задача* 1.** Пусть G - компактная полупростая группа Ли. Распространив левыми сдвигами форму Киллинга, помноженную на минус единицу, на касательные пространства в каждой точке, превратим группу в риманово многообразие.

a) Опишите группу изометрий этого многообразия
b) Покажите, что это симметрическое пространство. Опишите отражения, автоморфизм и разложение Картана алгебры Ли группы изометрий
c) Положительна или отрицательна кривизна в двумерных направлениях?

***Задача* 2.** Вычислите кривизну K двумерной сферы радиуса R, пользуясь аналитическим определением кривизны в двумерном направлении S,

$$A_S(r) = \pi r^2 \left(1 - \frac{Kr^2}{12} + o(r^2)\right),$$

где $A_S(r)$ - площадь поверхности, заметенной геодезическими длины r, вышедшими из данной точки вдоль двумерной площадки S.

***Задача* 3.** Тот же вопрос для плоскости Лобачевского в модели единичного круга с метрикой

$$dg = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} = R^2 \frac{dz\, d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}$$

***Задача* 4.** Вычислите кривизну K двумерного симметрического пространства X, воспользовавшись ее выражением через тройные коммутаторы полей Киллинга[1]

$$K = \frac{([[x, y], x],\ y)}{|x \vee y|^2}$$

a) если X - двумерная сфера радиуса R - см. задачу 2
b) если X - диск Пуанкаре[2] - см. задачу 3

Здесь x и y - элементы алгебры Ли группы изометрий X, отождествленные с касательными векторами в данной точке p многообразия X: поток e^{tx} двигает точку p вдоль геодезической соответствующего направления; $|x \vee y|$ - площадь параллелограмма, образованного в касательной плоскости векторами x и y.

***Задача* 5.** * Пусть $\mathbf{g}$ - алгебра Ли группы $G \subset GL(n, \mathbb{R})$; $\operatorname{Exp} : \mathbf{g} \to G$ - экспоненциальное отображение $z \to \exp(z)$; $L_g : G \to G$ - отображение левого сдвига, $L_g(h) = gh$. Дифференциал $d\operatorname{Exp}_x$ касательного отображения в точке $x \in \mathbf{g}$ отображает касательное пространство $T_x\mathbf{g} \sim \mathbf{g}$ в касательное пространство $T_{\exp x}G$ к группе в точке $\exp x$. Отождествим линейные пространства $T_x\mathbf{g}$, $\mathbf{g}$ и T_eG. Докажите формулу

$$d\operatorname{Exp}_x = dL_{\exp x} \circ \frac{1 - e^{-\operatorname{ad}_x}}{\operatorname{ad} x}$$

---

[1] на лекции в формуле был ошибочно написан знак минус; он привел к путанице в примерах

[2] здесь удобно воспользоваться элементами алгебры Ли $su(1,1)$, соответствующим однопараметрическим подгруппам $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & i\operatorname{sh} t \\ -i\operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$