

## Группы Ли II 2021

### Программа курса

1. Свойства представлений компактных групп: унитарность, полная приводимость, конечномерность неприводимых.
2. Матричные элементы неприводимых представлений компактной группы: ортогональность, полнота в пространстве квадратично интегрируемых функций на группе.
3. Теория классических рядов Фурье как частный случай анализа Фурье на компактной группе Ли.
4. Группа  $SU(2)$ . Связь с  $SO(3)$ . Параметризация углами Эйлера. Алгебра Ли. Инвариантная мера. Конечномерные представления.
5. Матричные элементы конечномерных представлений  $SU(2)$ . Гармонический анализ на двумерной сфере. Многочлены Лежандра как матричные элементы.
6. Группа  $SL(2, \mathbb{R})$ . Связь с группами  $SU(1, 1)$  и  $SO_0(2, 1)$ . Разложения Ивасава, Гаусса и Картана. Геометрические действия на верхней полуплоскости и диске Пуанкаре.
7. Представления основной неунитарной серии группы  $SL(2, \mathbb{R})$ . Описание в функциях одного переменного и как индуцированного представления.
8. Двойственные представления основной серии. Унитарная основная серия.
9. Сплетающие операторы между представлениями основной серии. Интегральное представление. Аналитическое продолжение по параметру. Связь с теорией обобщенных функций. Вычисление композиции сплетающих операторов.
10. Представления основной серии в особых точках. Дополнительные сплетающие операторы. Представления дискретной серии.
11. Группа  $SL(2, \mathbb{C})$ . Разложения Картана и Ивасава. Представления основной серии
12. \* Характеры унитарных представлений. Вычисление характеров основной унитарной и дискретной серий представлений.
13. \* Гармонический анализ на группе  $SL(2, \mathbb{R})$ . Мера Планшереля. Формула Планшереля. Разложение  $L_2(SL(2, \mathbb{R}))$  по неприводимым представлениям.
14. Нильпотентные, разрешимые, редуцированные и полупростые алгебры Ли. Форма Киллинга и ее связь с полупростотой и компактностью.
15. Вещественные формы полупростых комплексных алгебр Ли. Компактная и расщепимая формы. Теорема существования компактной формы, согласованной с данной вещественной.
16. Инволюция Картана и разложение Картана  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  вещественных полупростых алгебр Ли. Свойства. Примеры.
17. Векторная картановская подалгебра полупростой вещественной алгебры (максимальная коммутативная в  $\mathfrak{p}$ ). Ограниченные корни. Разложение Ивасава полупростой вещественной группы Ли.
18. Римановы многообразия. Связности. Тензоры кручения и кривизны. Связность Леви-Чивита. Геодезические.
19. Симметрические пространства. Геометрические свойства: геодезическая полнота, полнота, транзитивность группы изометрий. Примеры: сферы, гиперболические пространства, грассманианы.

20. Кривизна риманового многообразия в двумерном направлении. Геометрический смысл. Связь с тензором кривизны. Примеры многообразий положительной и отрицательной кривизны.
21. Тензор кривизны симметрического пространства. Кривизна симметрических пространств компактного, некомпактного и евклидового типа.
22. Двойственность между симметрическими пространствами.
23. Четыре типа симметрических пространств. Классификация Картана симметрических пространств серии  $A$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н.Я.Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп
- [2] Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам
- [3] И.М.Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений
- [4] И.М.Гельфанд, Г.Е. Шилев, Обобщенные функции и действия над ними
- [5] Д.П.Желобенко, Компактные группы Ли и их представления
- [6] Д.П.Желобенко, А.И.Штерн, Представления групп Ли.
- [7] А.А.Кириллов, Элементы теории представлений
- [8] А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани, Теоремы и задачи функционального анализа
- [9] С.П.Новиков, И.А.Тайманов, Современные геометрические структуры и поля
- [10] С.Хелгасон, Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства