Семинар 7.

Задача 1. Пусть $(x_0 : x_1 : x_2)$ - проективные координаты в $\mathbb{P}^2$, $F(x_0, x_1, x_2)$ - форма степени 3 (кубическая форма), а $X = \{F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ - кубическая кривая (кратко: кубика), задаваемая формой F. К какому наиболее простому виду можно привести уравнение $F = 0$ кубики X? Ответ можно писать как в подходящих проективных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$, так и в аффинных координатах (x, y), где, скажем, $x = x_1/x_0,\ y = x_2/x_0$.

Задача 2. Пусть основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто, F и G - ненулевые формы от переменных $x_0, x_1, ..., x_n$, а $X = \{F(x_0, ..., x_n) = 0\}$ и $Y = \{G(x_0, ..., x_n) = 0\}$- гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$, задаваемые формами F и G соответственно. Пусть $Y \subset X$.
1) Пусть G - линейная форма. Докажите, что форма F делится (как однородный многочлен от $x_0, x_1, ..., x_n$) на форму G.
2) Пусть G - форма степени $h > 1$ такая, что найдется прямая $l \subset \mathbb{P}^n$, для которой множество $l \cap Y$ состоит из h различных точек. Докажите, что форма F делится на форму G.

Задача 3. Пусть F и X - те же, что и в предыдущей задаче, и пусть F имеет степень d. Напомним некоторые обозначения и понятия. Пусть $a = (a_0, ..., a_n)$ - точка в $\mathbb{P}^n$, $D_a :\ \mathbf{k}[x_0, ..., x_n] \to \mathbf{k}[x_0, ..., x_n],\ \ f \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ - оператор поляризации, и $D_a^k := \underbrace{D_a \circ ... \circ D_a}_{k}$ - k-кратная композиция оператора D_a с самим собой. Гиперповерхность $P_a(X) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid (D_a F)(x) = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$ называется *(первой) полярой точки a относительно гиперповерхности X*, а гиперповерхность $P_{a^k}(X) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid (D_a^k F)(x) = 0\}$ в $\mathbb{P}^n$ называется *k-ой полярой точки a относительно гиперповерхности X*, $k \geqslant 1$. Докажите, что $a \in P_{a^k}(X)$ для любой точки $a \in X$ и любого k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$.

Задача 4. Как было установлено на семинаре, касательное пространство $\mathbb{T}_b X$ к гиперповерхности X в произвольной точке $b \in X$ совпадает с $(d-1)$-ой (т.е. последней) полярой $P_{b^{d-1}}(X)$:

$$\mathbb{T}_b X = P_{b^{d-1}}(X).$$

Докажите, что $\mathbb{T}_a P_{a^k}(X) = \mathbb{T}_a X$ для любой точки $a \in X$ и любого k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$.

Задача 5. Напомним, что точка $a \in X$ называется *особой*, если $\mathbb{T}_a X = \mathbb{P}^n$. Множество особых точек гиперповерхности X обозначается $\mathrm{Sing} X$. Докажите, что если $a \in \mathrm{Sing} X$, то $a \in \mathrm{Sing} P_{a^k}(X)$ для любого k, $1 \leqslant k \leqslant d-1$.