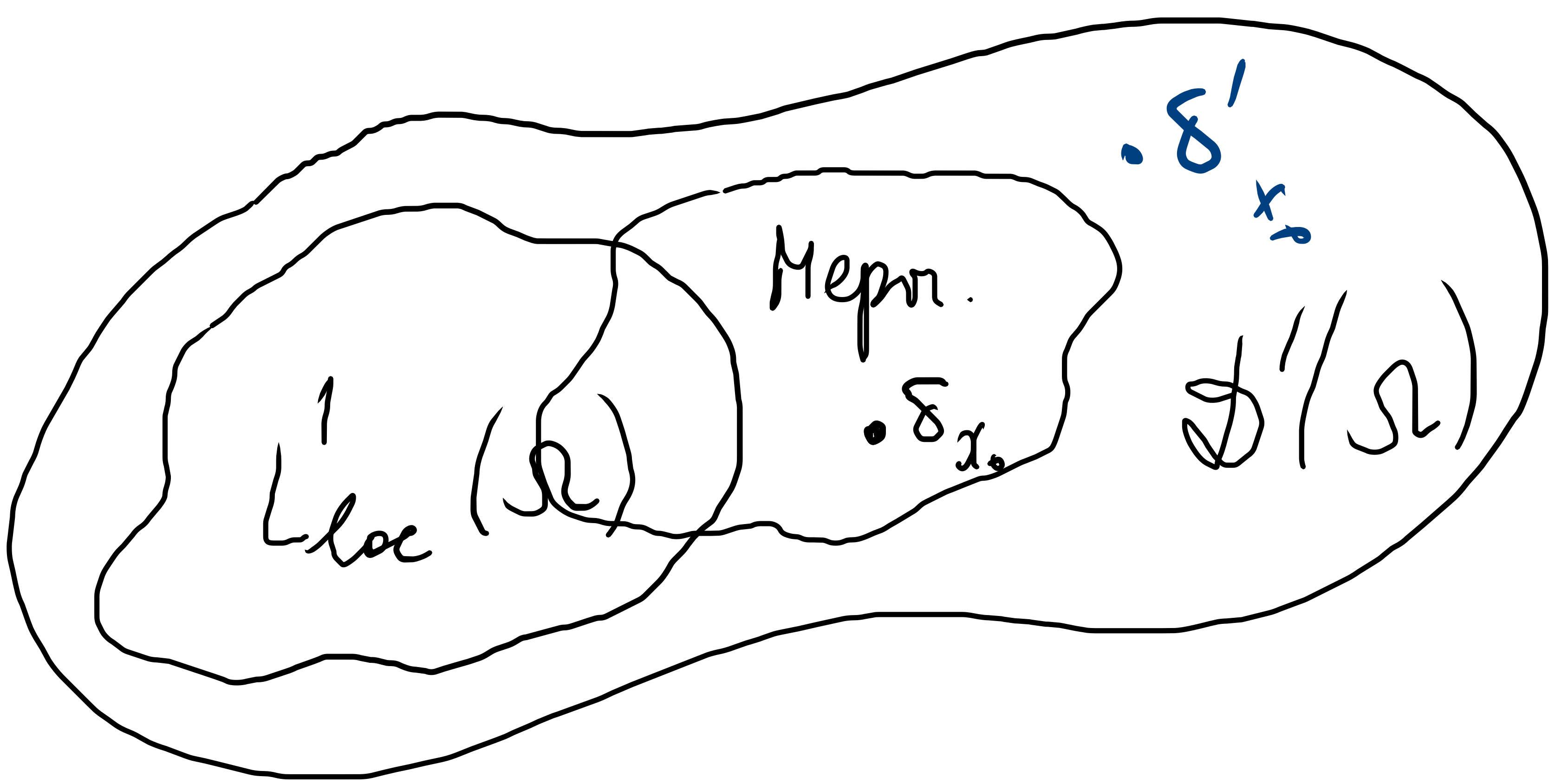
Обобщенные функции (распределения)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ откр.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ — лин. непр. функционалы на $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$



$x_0 \in \Omega$

$\langle \varphi, \delta_{x_0} \rangle := \varphi(x_0)$

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

∘) $\mathcal{D}'(\Omega)$ – лин. пр-во.

∘) полезно завести в $\mathcal{D}'(\Omega)$ топологию / сходимость.

$u_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\qquad$ $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u \in \mathcal{D}'(\Omega)$

(слабо в смысле обобщ. ф-ций),

если $\langle \varphi, u_k \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle \varphi, u \rangle$ $\quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

·) Дифференцирование обобщ. функций. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ откр

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \qquad \alpha_i \in \mathbb{N}$$

$$\langle \varphi, \underbrace{D^\alpha u} \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle \underbrace{D^\alpha \varphi}, u \rangle$$

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

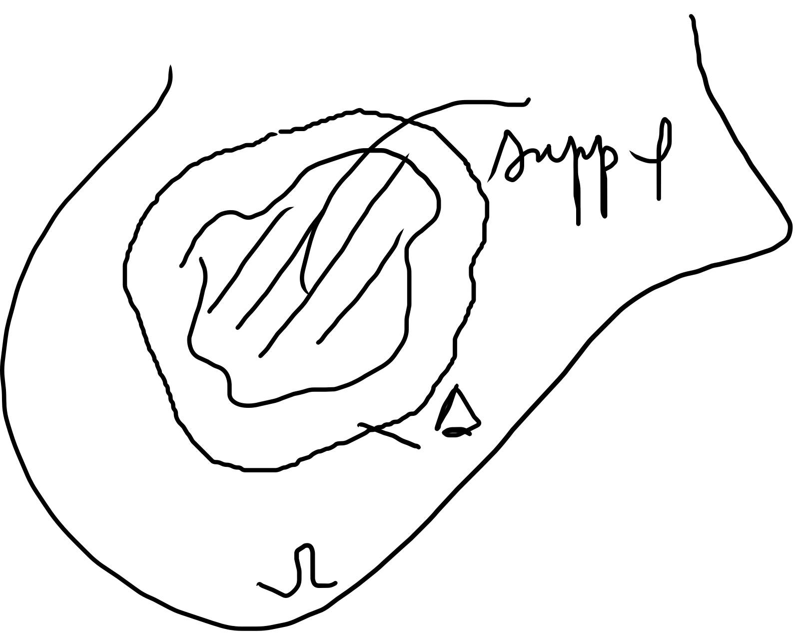
В частности, $\langle \varphi, u_{x_i} \rangle = - \langle \varphi_{x_i}, u \rangle$

Предл. $\{ u \in C^k(\Omega), \quad |\alpha| \le k \Rightarrow D^\alpha u = (D^\alpha u)$ класс.

Д-во: $\quad u \in \mathcal{D}'(\Omega) \qquad u \in C^k(\Omega)$

$$\underbrace{\langle \varphi, D^\alpha u \rangle}_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha \varphi, u \rangle =$$

$$\overset{\boxed{u \in L^1_{loc}(\Omega)}}{=} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha \varphi)(x)\, u(x)\, dx =$$



$$= (-1)^{|\alpha|} \cdot (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi(x) \underbrace{D^\alpha u(x)}_{\in\, C(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)} dx =$$

$$= \cancel{(-1)^{2|\alpha|}} \langle \varphi, D^\alpha u \rangle$$

ка.

Иногда сповали $\underbrace{D^\alpha u}_{\text{обобщ.}} = \underbrace{D^\alpha u}_{\text{класс.}}$ в смысле $\mathcal{D}'(\Omega)$,

п.т.д.

Интересное пример.

<u>1°</u>| $\Omega = \mathbb{R}$ $(n = 1)$

$u(x) = |x|$

Производная $u(x)$:

$\longrightarrow$ в классическом смысле $u'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

и при $x = 0$ не опред.

$\longrightarrow$ В обобщ. смысле.

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\langle \varphi, \underset{\text{обобщ.}}{\underset{\uparrow}{u'}} \rangle = -\langle \varphi', u \rangle =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,|x|\,dx = \cancel{+} \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,\cancel{(-}x)\,dx -$$

$$-\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,x\,dx = \cancel{x\varphi(x)}\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx - \cancel{x\varphi(x)}\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{sign}(x)\,dx = \langle \varphi, h \rangle$$

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{u' = \mathrm{sign}\, x}$$

в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Оказалось (только в этом случае), что

$$u' = u' \quad \underline{\text{п.в.}}$$

в см. $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ — в кл. смысле

$\underline{2^{\circ}}$|

$(\operatorname{sign} x)' = ?$ (т.е. $|x|''$)

$\longrightarrow$ в классич. смысле.

$$(\operatorname{sign} x)' = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

и не опред. при $x=0$./

Но в классич. сл. $(\operatorname{sign} x) = 0$ п.в. x.

кл.

$\longrightarrow$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\quad \langle \varphi, \operatorname{sign}' \rangle = -\langle \varphi', \operatorname{sign} \rangle =$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,\operatorname{sign} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} = 2\varphi(0) = 2\langle \varphi, \delta \rangle$$

$$= \langle \varphi, 2\delta \rangle .$$

T.e., $\boxed{\operatorname{sign}' x = 2\delta.}$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\neq 0$

4°

$\delta' = ?\quad \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\langle \varphi, \delta' \rangle = -\langle \varphi', \delta \rangle = -\varphi'(0).$

$\delta' : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto -\varphi'(0)$

это и не функция, и не мера (!)

Непрерывность дифф.:

$$u_k \in \mathcal{D}'(\Omega) \qquad u_k \xrightharpoonup[k\to\infty]{} u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

(т.е. $\langle \varphi, u_k \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle \varphi, u \rangle$), $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Тогда $\boxed{D^\alpha u_k \rightharpoonup D^\alpha u}$.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\langle \varphi, D^\alpha u_k \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \underbrace{D^\alpha \varphi}_{\in \mathcal{D}(\Omega)}, u_k \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha \varphi, u \rangle = \langle \varphi, D^\alpha u \rangle$$

В частности, если $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$u_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$

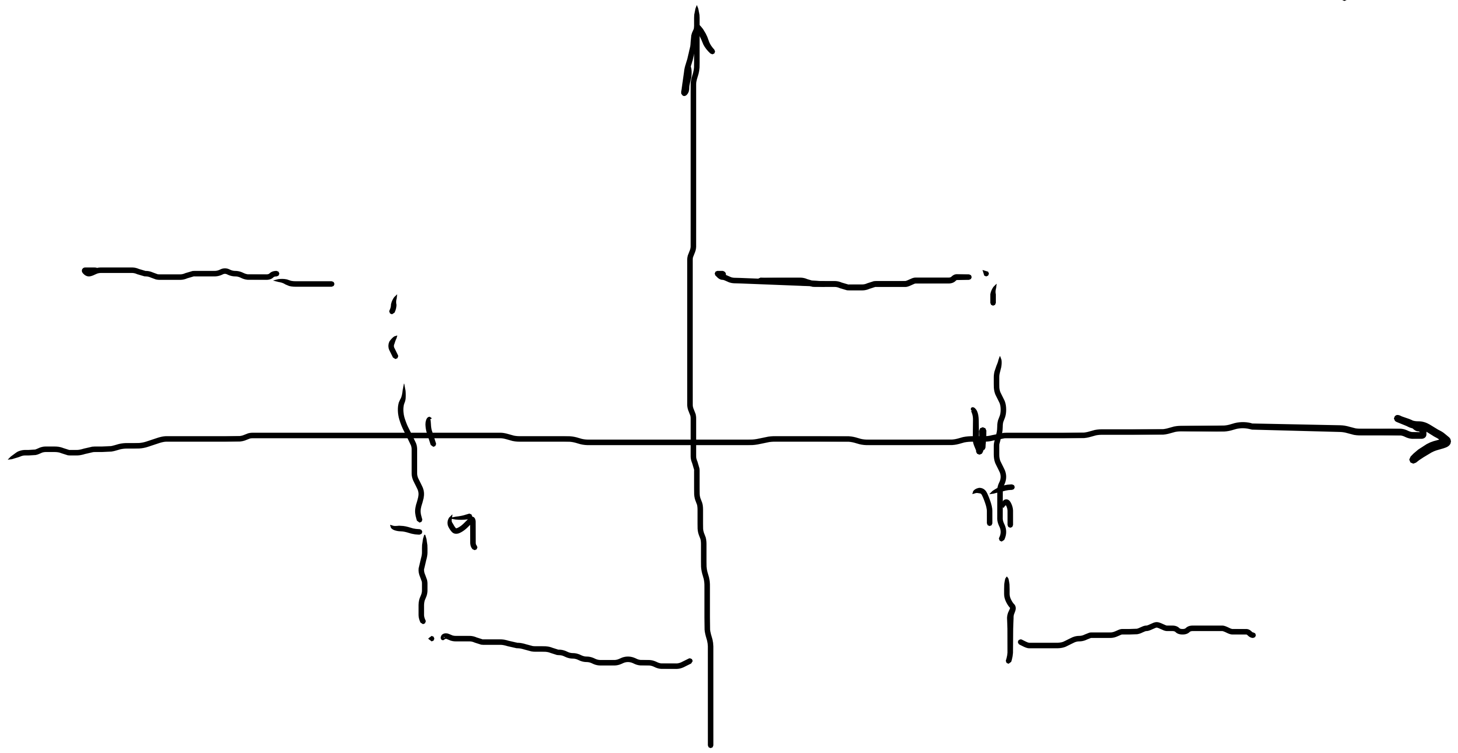
$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} u_k \xrightarrow[m\to\infty]{} u.}$$

то $\displaystyle D^\alpha \sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{k=1}^{m} D^\alpha u_k \xrightarrow[m\to\infty]{} D^\alpha u$, или, другими словами, $\displaystyle D^\alpha u = \sum_{k=1}^{\infty} D^\alpha u_k$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$

(!) То есть сходящиеся (в $\mathcal{D}'(\Omega)$) ряды обобщённых ф-ций можно почленно дифф. любое число раз.

Пример

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0], \\ 1, & x \in (0, \pi] \end{cases}$$



$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \quad \text{в} \quad L^2(-\pi,\pi)$$

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right) = \frac{1}{\pi k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k\pi}\cos kx\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(1-\cos k\pi - \cos k\pi + 1\right) = \frac{2}{k\pi}\left(1-\cos k\pi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\begin{cases} \frac{2}{2j+1}, & k = 2j+1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2j+1}\sin(2j+1)x \quad \text{в} \quad L^2(-\pi,\pi)$$

а значит, и в $\mathcal{D}'(-\pi,\pi)$.

проверить не в общем случае

$$2\delta = u'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{+\infty} \cos(2j+1)x. \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(-\pi,\pi)$$

$$2\delta = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \cos(2j+1)x. \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(-\pi,\pi)$$

$$\delta = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \cos(2j+1)x.$$

это не ряд Фурье никакой $f \in L^1(-\pi,\pi)$.

$$\left.\begin{aligned}
\delta' &= -\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\sin(2j+1)x \\
\delta'' &= -\frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^2\cos(2j+1)x
\end{aligned}\right\}\ \text{сход. ряда в смысле } \mathcal{D}'(-\pi,\pi).$$

$\vdots$

Пример. $u = u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}^{+}$, $x \in [0,l]$

$$\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\
u(t,0) = u(t,l) = 0 \\
u(0,x) = u_0(x) \\
u_t(0,x) = \cancel{0}
\end{cases}$$

можно заменить на более общую $v_0(x)$

$(*)\quad u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\frac{ak\pi t}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}$, где

сходится в $\mathcal{D}'((0,+\infty)\times(0,l))$

c_k — коэфф. Фурье в разложении u_0 в ряд по sin:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l} \leftarrow \text{в } L^2(0,l)$$

$u_0 \in L^2(0,l)$ .. $\qquad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$.

обобщ.

$$u_{tt} = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{k^2\pi^2}{l^2} \cos\frac{ak\pi t}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{k^2\pi^2}{l^2} \cos\frac{ak\pi t}{l} \times \sin\frac{k\pi x}{l}$$

обобщ.

$$\Box_a u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Вывод: чтобы $(\circledast)$ было решением хотя бы порядка ур-я дост. Требовать всего лишь $u_0 \in L^2(0,l)$, только когда "решение" понимается в смысле обобщенных ф-ций.