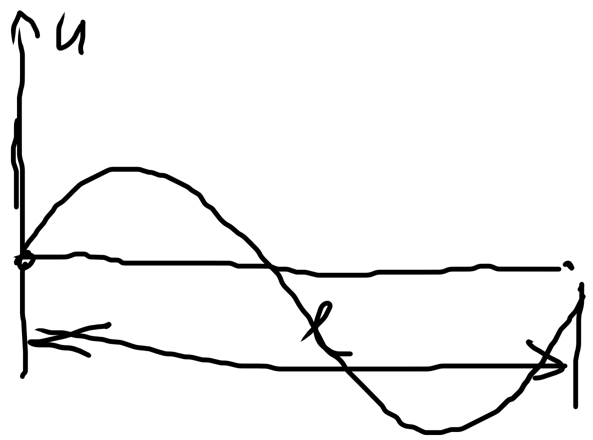


$u = u(t, x)$ $\qquad t \in \mathbb{R}^+$

$x \in [0, l)$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (x,t) \in (0, +\infty) \times (0, l) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = \cancel{V_0(x)} \end{cases}$$

$v_0 = 0$ для простот.

Формальное решение: $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{ak\pi t}{l}\right) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}$ $\quad (1)$

$$u_{tt} \overset{?}{=} -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \cos\frac{ak\pi t}{l} \sin\frac{k\pi x}{l} \quad (2); \qquad u_{xx} \overset{?}{=} -\sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{k^2\pi^2}{l^2} \cos\frac{ak\pi t}{l} \sin\frac{k\pi x}{l} \quad (2')$$

$c_k = ?$

$u_0(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l}$

$$\boxed{c_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(s)\sin\frac{k\pi s}{l}\,ds}$$

Вопросы: 1) при каких условиях ряды (1), (2), (2') сходятся?

2) — , — , — , — ряды (2), (2') это производные и определенной рядом (1)?

дост. условие для 2): ряды (2), (2') сход. абсолютно и равномерно.

$$|u_{tt}| \le a^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \frac{k^2\pi^2}{l^2} = \frac{a^2\pi^2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k|$$

$$|u_{xx}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \frac{k^2\pi^2}{l^2} = \frac{\pi^2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k|$$

дост., чтобы этот ряд сходился

$$|u| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$$

Дост. условие для положит. ответа на 1) и 2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k| < +\infty. \qquad (3)$$

Хорошо бы (3) выразить "прямо" в терминах u_0

Достат. усл. для (3) (а значит, для 1) и 2)):

$$\begin{cases} u_0 \in C([0,l]) & u_0(0) = u_0(l) = 0 \\ u_0 \in \cancel{C^2}([0,l]), & u_0''' \in L^2(0,l). \end{cases}$$

п.в.

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(s)\sin\frac{k\pi s}{l}\,ds =$$

$$= -\frac{2}{\cancel{l}}\frac{\cancel{l}}{k\pi}\int_0^l u_0'(s)\cos\frac{k\pi s}{l}\,ds = \frac{2}{k\pi}\frac{l}{k\pi}\int_0^l u_0''(s)\sin\frac{k\pi s}{l}\,ds =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\frac{l}{k\pi}\cdot\frac{l}{k\pi}\int_0^l u_0'''(s)\cos\frac{k\pi s}{l}\,ds = -\frac{l^3}{k^3\pi^3}\underbrace{\frac{2}{l}\int_0^l u_0'''(s)\cos\frac{k\pi s}{l}\,ds}_{\alpha_k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2 < +\infty$$

$$C_k = -\frac{\ell^3}{\pi^3} \frac{1}{k^3} \alpha_k .$$

$$|C_k| = \frac{\ell^3}{\pi^3} \frac{1}{k^3} |\alpha_k|$$

Збіжн из предп

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty$$

(!)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |C_k| = \frac{\ell^3}{\pi^3} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |\alpha_k|}_{??} < +\infty$$

$$\frac{1}{k} |\alpha_k| \le \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |\alpha_k|^2 \right)$$

$$\left(uv \le \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right)$$

$$u_0''' \in L^2((0,l))$$

$$C + \int_0^x u_0'''(s)\,ds$$

Если бы просто требовали ~~$u_0 \in C^2([0,l])$~~, $u_0(0) = u_0(l) = 0$

Только такого не достаточно

$$C_k = \frac{\gamma}{k^2}\beta_k$$

$$u_0'' = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < +\infty}$$

$$\sum_{k=1} k^2 |c_k| \geq \gamma \sum_{k=1} |\beta_k|$$

Д/З

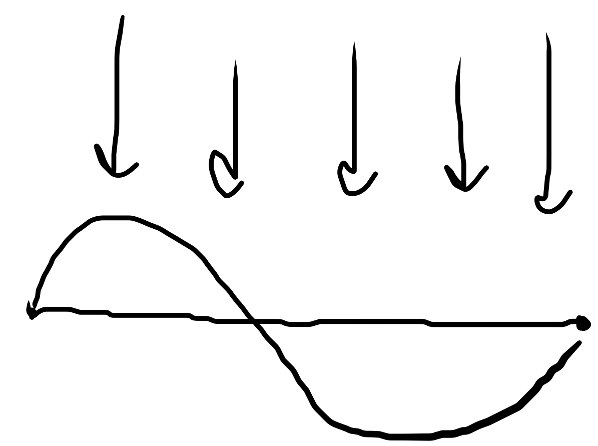
(!) (!)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

формал. реш., предп. доп. усл. на u_0, v_0, гарантир., что форм. реш. классическое.

Волновая задача.

$u = u(t, x) \quad t \in \mathbb{R}^+$
$x \in [0, l]$



$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Формальное решение:

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k''(t) \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad u_{xx} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\pi^2}{l^2} p_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$\Box_a u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(p_k'' + \frac{a^2 k^2 \pi^2}{\ell^2} p_k \right)}\sin\frac{k\pi x}{\ell} =$$

$$= \underline{\underline{f(t,x)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\varphi_k}(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}.$$

$$\varphi_k(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(t,s)\sin\frac{k\pi s}{\ell}\,ds.$$

Задача Коши.

$$\boxed{\begin{aligned} & p_k'' + \frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} p_k = \varphi_k(t) \\ & p_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(s)\sin\frac{k\pi s}{l}\,ds \\ & p_k'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l v_0(s)\sin\frac{k\pi s}{l}\,ds. \end{aligned}}$$

Лин. неоднор. ОДУ 2 порядка с пост. коэфф.

Нач. усл.: $t=0$

$$\underline{u_0(x)} = u(0,x) = \underline{\sum_{k=1}^{\infty} p_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l}}$$

$$\underline{v_0(x)} = u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k'(t)\sin\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_{t=0} = \underline{\sum_{k=1}^{\infty} p_k'(0)\sin\frac{k\pi x}{l}}$$

Любопытный частн. случай.

$$f(t,x) = \cos\omega t \cdot \sin\frac{2\pi x}{l}.$$

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \cos\omega t, & k=2 \\ 0, & k\neq 2. \end{cases}$$

решить

$\boxed{k=2}$ $$p_2'' + \frac{4a^2\pi^2}{l^2}p_2 = \cos\omega t$$

$\boxed{k\neq 2}$ $$p_k'' + \frac{k^2a^2\pi^2}{l^2}p_k = 0.$$

Д/З:

(1) Решить в двух случаях

(2) $f(t, x) = \cos \omega t$

Для этого случая вычислить D, Δ, Y

$(\forall k)$