Линейные однор. системы с постоянными коэфф.

$$y' = Ay \qquad y(\cdot) \in \mathbb{R}^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- 0 — всегда решение
- ровно n линейно независимых решений.
- $\begin{cases} y' = Ax \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0.$ $\quad y_0 \in \mathbb{R}^n,\ x_0 \in \mathbb{R}$

Напоминание об экспоненте матрицы.

1) A - диагонализуема : $\exists T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$e^{A(x-x_0)} = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n(x-x_0)} \end{pmatrix} T$$

2). $$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}$$

J_k - жордановы клетки.

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{A(x-x_0)} = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{J_1(x-x_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_m(x-x_0)} \end{pmatrix} T$$

$$e^{J_k(x-x_0)} = e^{\lambda(x-x_0)} \begin{pmatrix} 1 & x-x_0 & \frac{(x-x_0)^2}{2} & \cdots & \frac{(x-x_0)^{m_k-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & x-x_0 & & \frac{(x-x_0)^{m_k-2}}{(m-2)!} \\ & & 1 & x-x_0 & \cdots \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & 1 & x-x_0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Наблюдение</u>: $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$

$\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ (Иначе говоря $\exists\ \operatorname{Re}\lambda_k < \mu < 0$).

В этом случае 0 - асимптотически устойчивое решение ОДУ

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0$$

$$|y(x)| \le |y_0| \cdot \left\| e^{A(x-x_0)} \right\| \le$$

$$\le \underbrace{|y_0| \, \|T\| \cdot \|T^{-1}\|}_{C} \cdot \left\| \begin{pmatrix} e^{J_1(x-x_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_m(x-x_0)} \end{pmatrix} \right\|$$

$$\le C \, Q_p(x-x_0) \, e^{\mu(x-x_0)} \to 0$$

$\mu < 0$

при $x \to +\infty$

$x \to +\infty$.

Пример: важный частный случай $n=2$.

$$y' = Ay \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad y(\cdot) \in \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Либо $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, либо $\sigma(A) = \{\lambda\}$

кратности 2

(I) $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

I.1) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0 = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(x-x_0)} \end{pmatrix} Ty_0$$

Как построить T?

$$\begin{cases} A v_1 = \lambda_1 v_1 \\ A v_2 = \lambda_2 v_2 \end{cases}$$

Span $\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^2$

$$T = \left(v_1 , v_2 \right)$$

Какой "геом" смысл. у формулы для решения?

$z(\cdot)$: $y(x) = T z(x)$

$$y' = T z' = A y = A T z \Rightarrow z' = \left(T^{-1} A T\right) z = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

(!)

$$\boxed{\begin{cases} z_1' = \lambda_1 z_1 \\ z_2' = \lambda_2 z_2 \end{cases}}$$

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 (x - x_0)}$$

$$z_2 = C_2 e^{\lambda_2 (x - x_0)}$$

$$z(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 (x - x_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 (x - x_0)} \end{pmatrix} \bar{C}$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = T z(x) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 (x - x_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 (x - x_0)} \end{pmatrix} \bar{C}$$

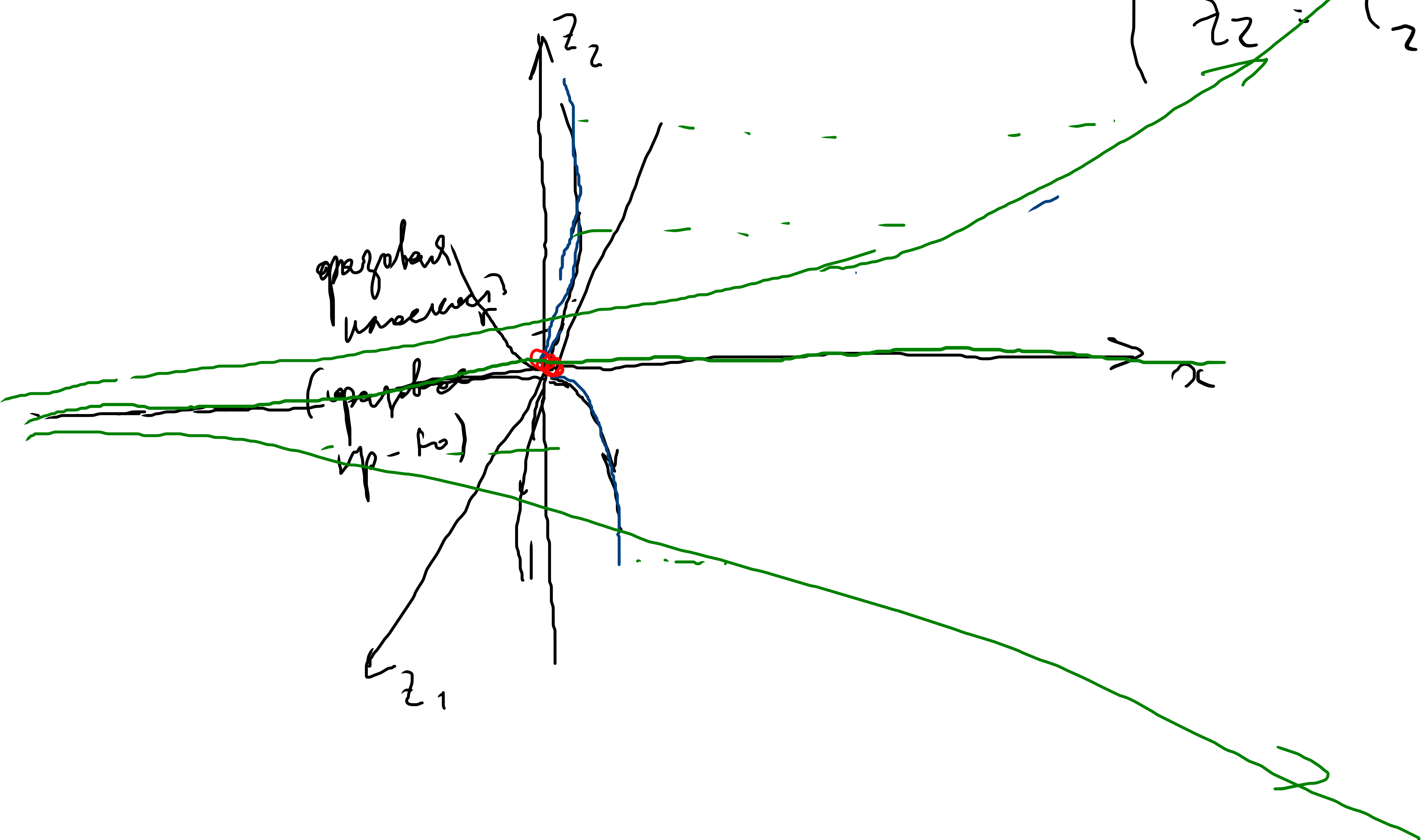
$$y_0 = y(x_0) = T \, Id \, \bar{C} = T \bar{C} \Rightarrow \bar{C} = T^{-1} y_0$$

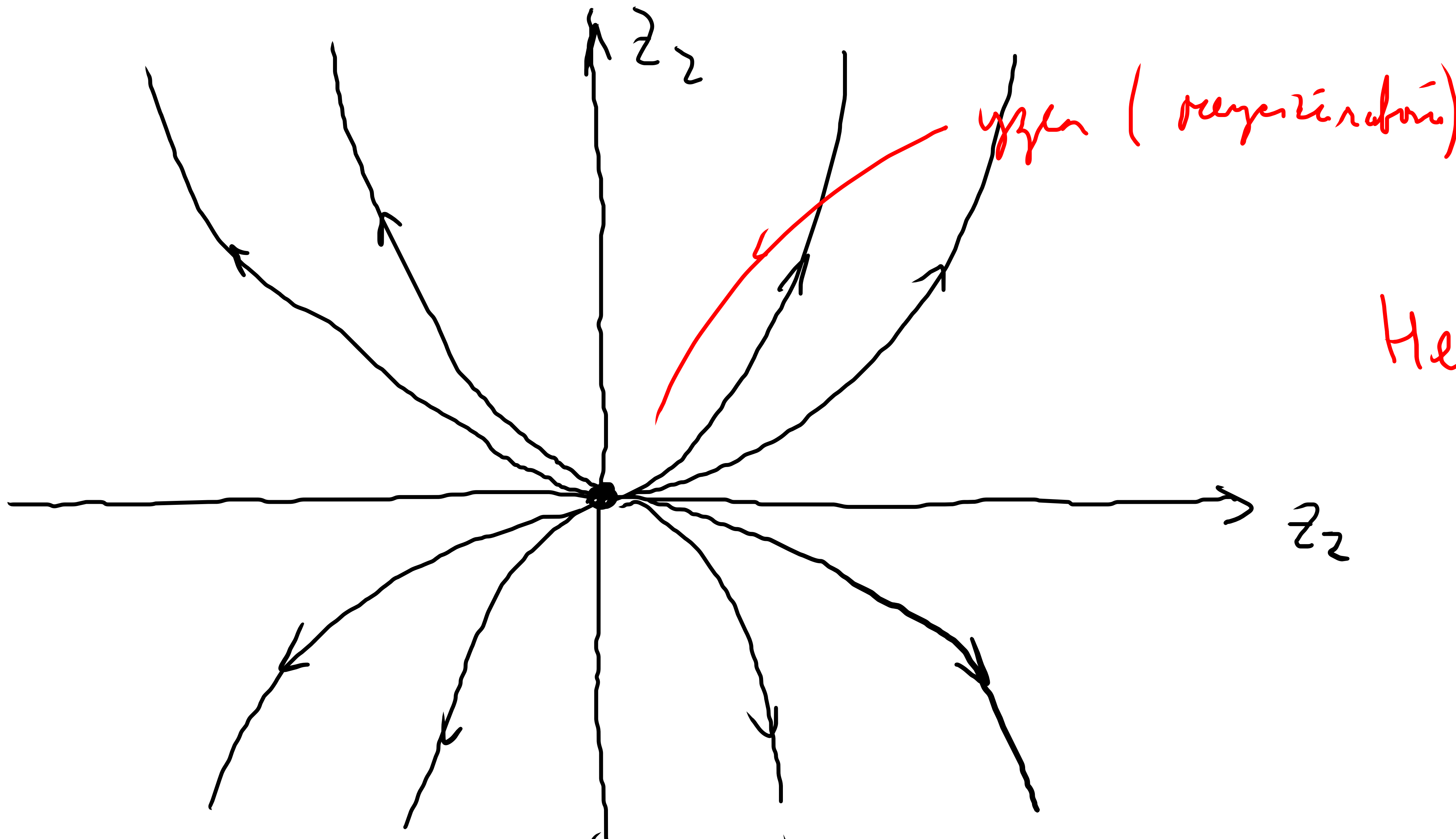
[illegible]:

$$y(x) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 (x - x_0)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 (x - x_0)} \end{pmatrix} T^{-1} y_0$$

$\lambda_1 > 0 \qquad \lambda_2 > 0$

$$\begin{cases} z_1 = C_1 e^{\lambda_1 (x - x_0)} \\ z_2 = C_2 e^{\lambda_2 (x - x_0)} \end{cases}$$





"фазовый портрет" ОДУ

Неустойчивый узел.

$$\begin{cases} z_1(x) = C_1 e^{\lambda_1 (x - x_0)} \\ z_2(x) = C_2 e^{\lambda_2 (x - x_0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{z_1}{C_1} = e^{\lambda_1 (x - x_0)} \\ \dfrac{z_2}{C_2} = e^{\lambda_2 (x - x_0)} \end{cases}$$

$$\left(\frac{z_1}{C_1}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{z_2}{C_2}\right)^{\lambda_1} \;:\; |z_2| = \tilde{C} |z_1|^{\alpha}$$

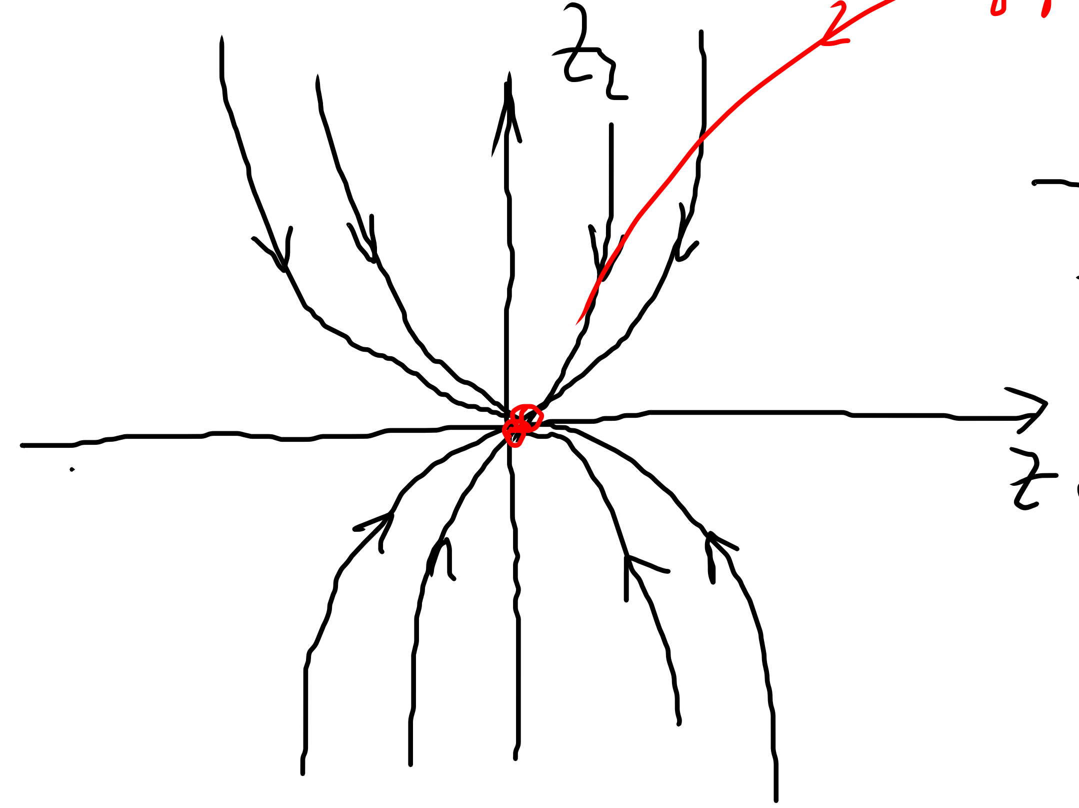
I.2.) $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0 \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$

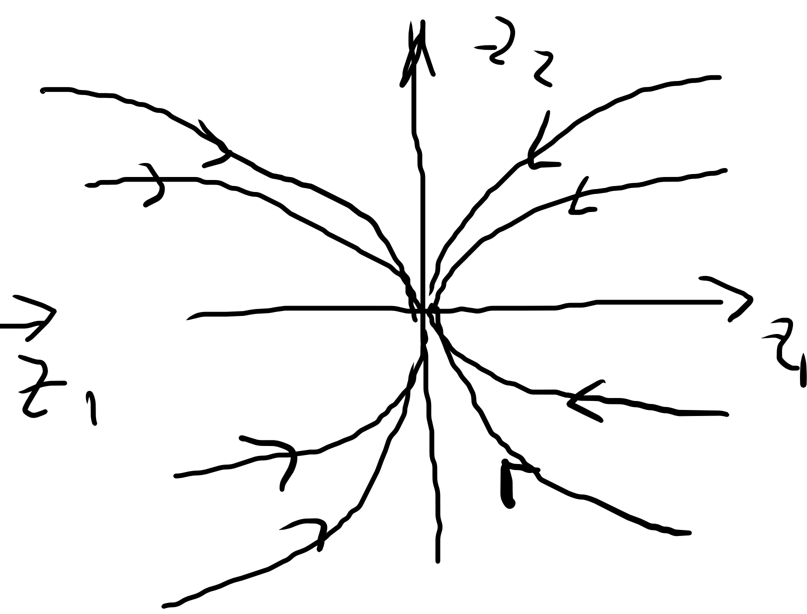
$$y = Tz \qquad T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_1' = \lambda_1 z \\ z_2' = \lambda_2 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = C_1 e^{\lambda_1 (x - x_0)} \\ z_2 = C_2 e^{\lambda_2 (x - x_0)} \end{cases}$$

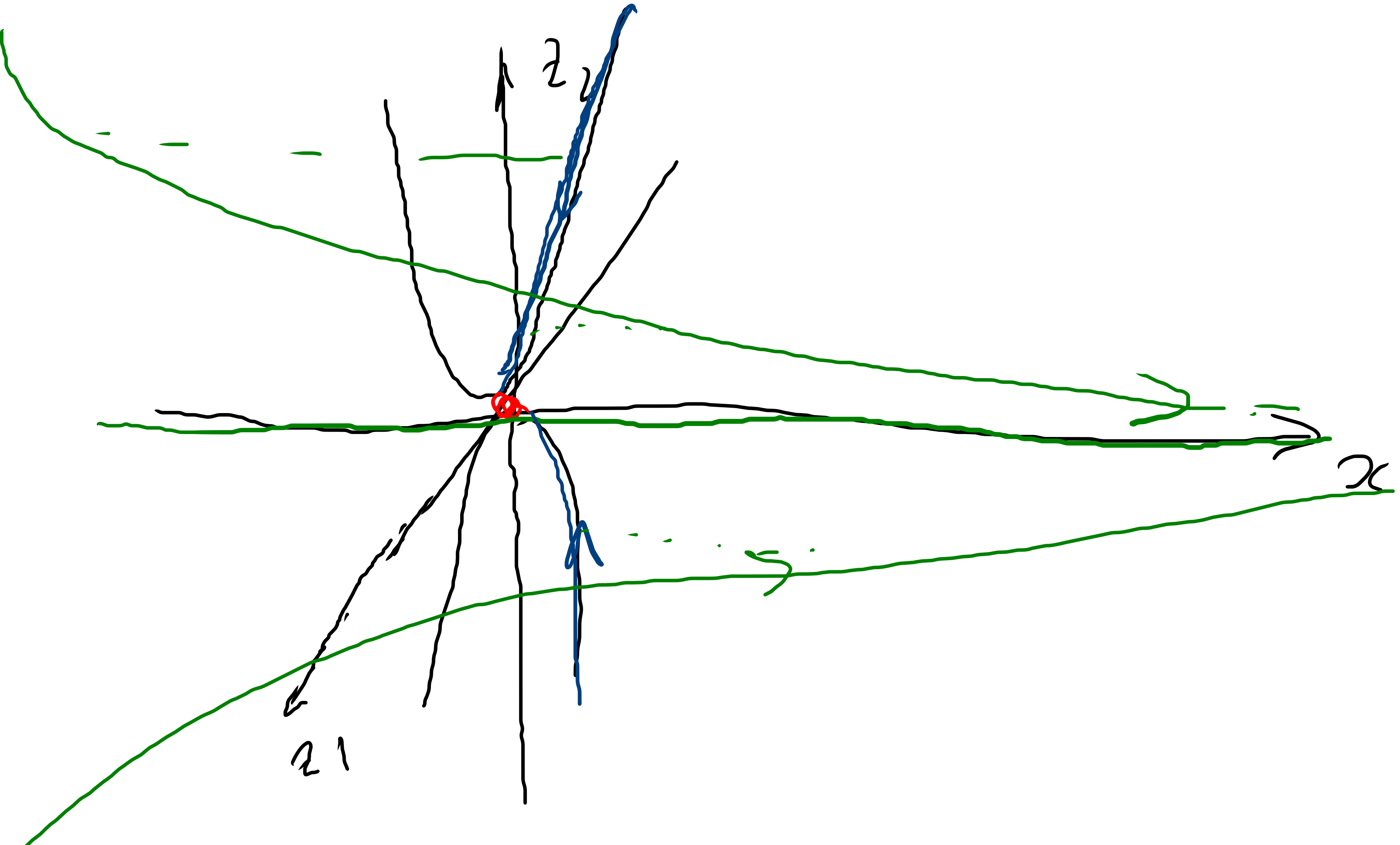
узел (устойчивый)

$$\left(\frac{z_1}{C_1}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{z_2}{C_2}\right)^{\lambda_1}.$$





устойчивый узел

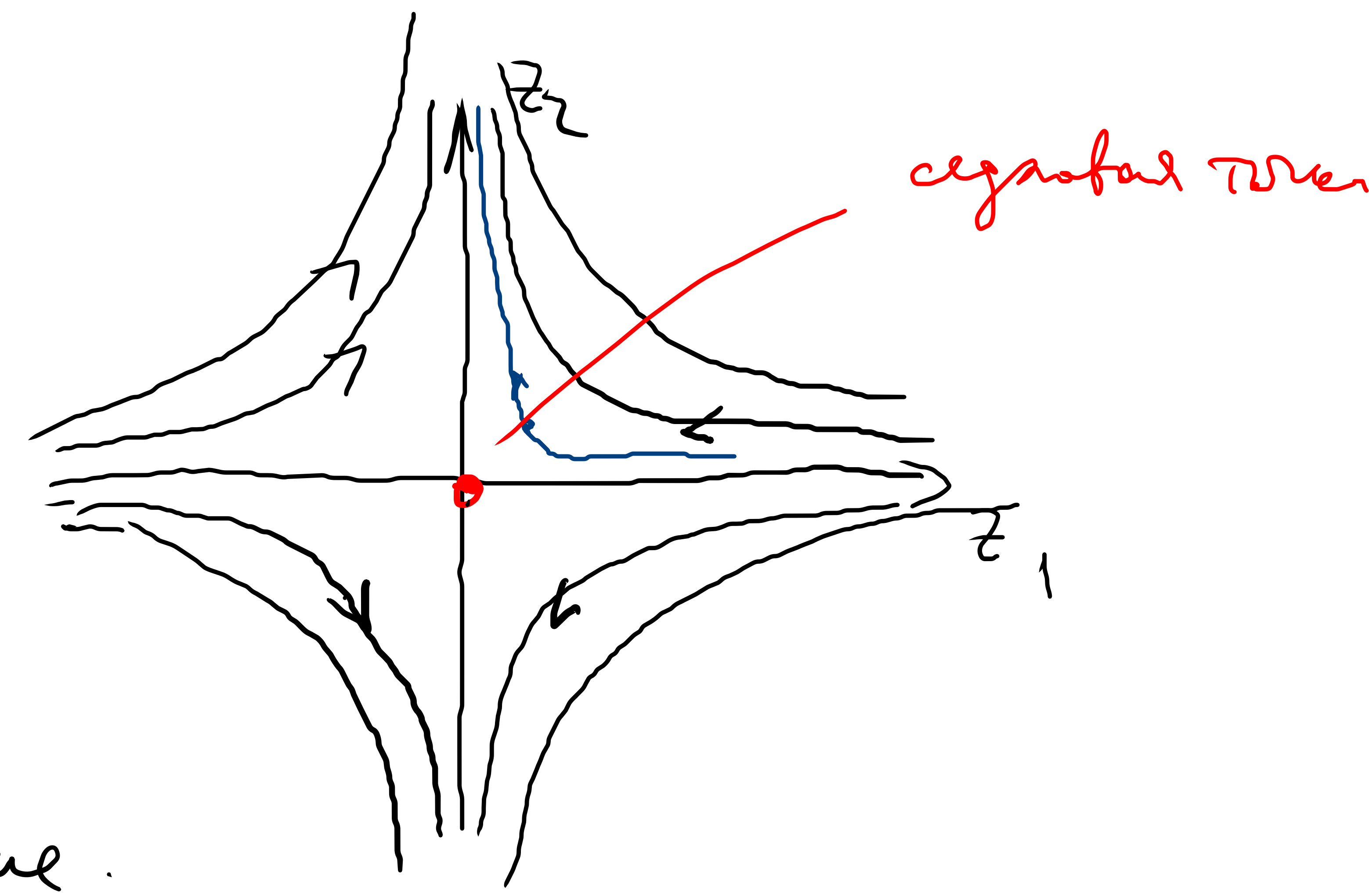


I.3.) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. (т.о. λ_1 и λ_2 имеют разные знаки)

$\exists\ \lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$

$$\begin{cases} z_1 = C_1 e^{\lambda_1 (x - x_0)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \\ z_2 = C_2 e^{\lambda_2 (x - x_0)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty \end{cases}$$

$$\left(\frac{z_1}{C_1}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{z_2}{C_2}\right)^{\lambda_1} = \left(\frac{C_2}{z_2}\right)^{-\lambda_1}$$



0 — не асимп. устойчив. решение.

седло

I.1), I.2), I.3) – структурно устойчивые ситуации.

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Downarrow y.$$

$$\begin{cases} y' = \tilde{A} y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Downarrow \tilde{y}$$

$\sigma(\tilde{A}) = \{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\}$

$\tilde{\lambda}_1 \approx \lambda_1$

$\tilde{\lambda}_2 \approx \lambda_2$

если $\tilde{A} \approx A$.

II.) λ_1, λ_2 – комплексно сопряженные

II.1). $\operatorname{Re} \lambda_1 \neq 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$. $\Rightarrow$ структурная устойчивость.

II.2). $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$ или $\operatorname{Re} \lambda_2 = 0$

III) Вырожд. ситуации. $(\lambda_1 = \lambda_2)$, $(\lambda_1 = 0)$

Структурно неустойчивы.