Задача 1. $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}$ $\quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$x \in \mathbb{R}$

Написать общее решение, нарисовать фазов. портрет, установить устойчивость / неустойчивость стац. реш.

Решение.

- стац. реш. $y = (0, 0)$
- Ровно 2 лин. незав. реш.
- Явн. формула

$y' = Ay \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$y(x) = e^{Ax}\bar{c}$

1). С.з. $\sigma(A) = ?$

$$\det \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0.$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

$$\lambda = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 10} = 3{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 3{,}5 \pm 1{,}5 = \begin{cases} \nearrow 5 \\ \searrow 2 \end{cases}$$

2). Собств. вектора. $Av = \lambda v$

2.1) $Av_1 = 2v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 = 0.$

$$\begin{cases} 2v_1^1 + 2v_1^2 = 0 \\ v_1^1 + v_1^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1^2 = -v_1^1$$

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad \lambda_1 = 2$$

2.2). $A v_2 = 5 v_2$ $\qquad (A - 5\,Id)\, v_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} v_2 = 0.$$

$$-v_2^1 + 2 v_2^2 = 0. \Rightarrow v_2^1 = 2 v_2^2$$

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \lambda_2 = 5$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x}} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}}. \qquad (1)$$

2 лин. независимые решения.

Отступление: Как еще можно получить ф-лу (1)?
(иначе говоря, в чем смысл манипуляций с матрицами).

$$y' = Ay \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Попробуем искать решения в виде $y(x) = ue^{\lambda x}$.
$(u \in \mathbb{R}^2)$

Подставим в ур-е:

$$\underline{u\lambda e^{\lambda x}} = y' = Ay = \underline{Aue^{\lambda x}}$$

$$\cancel{e^{\lambda x}}(Au - \lambda u) = 0 \Rightarrow Au = \lambda u,$$

i.e. λ – с.з. A, u – с.в. A, отвеч. с.з. λ.

$\lambda_1 = 2 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda_2 = 5. \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x}$ $\qquad$ $y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5x}$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5x},$$

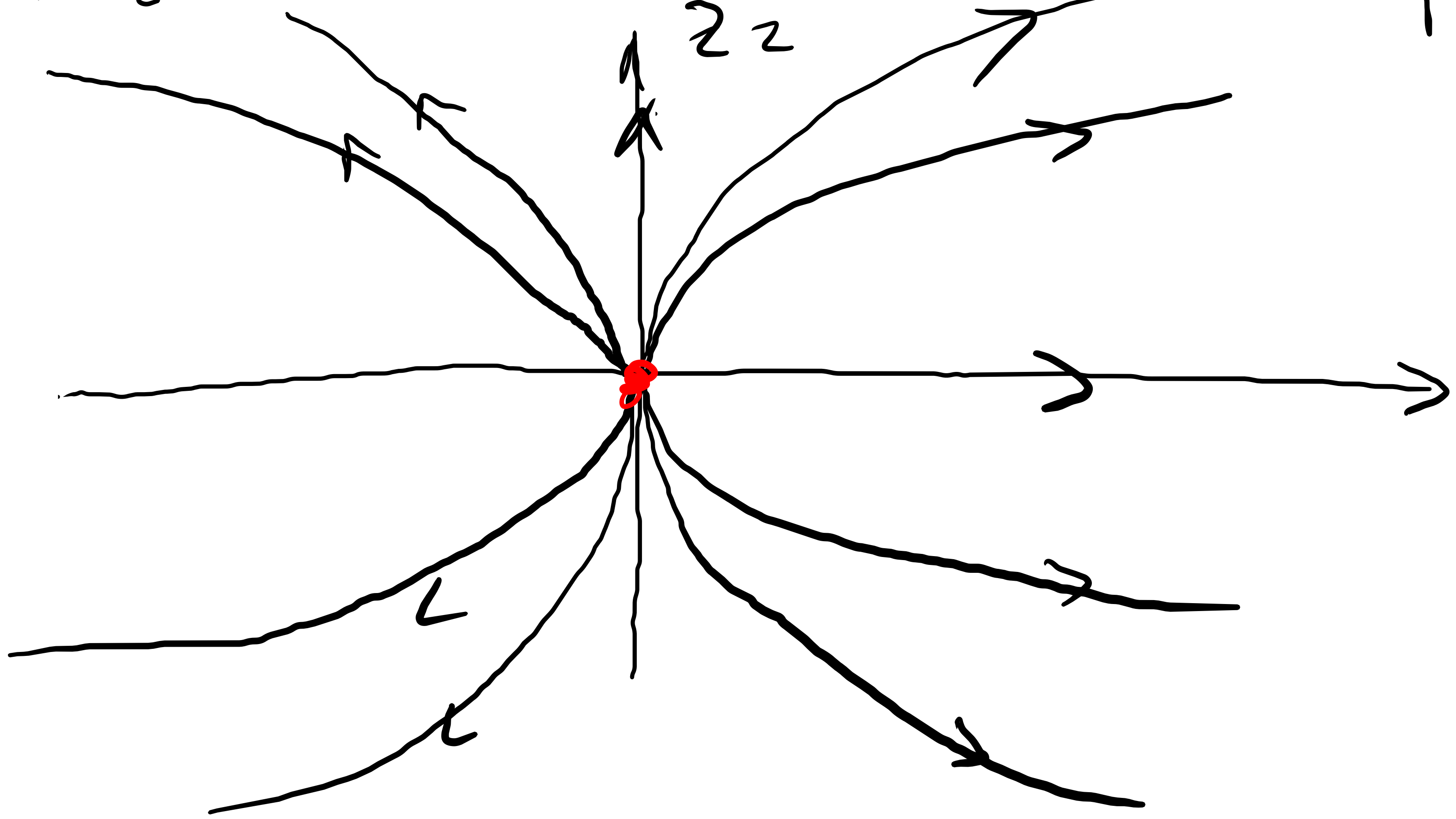
т.е. ф-ла (1).

3) Строим фазовый портрет.

3.1) z: $\quad y = Tz \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T^{-1} y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} z_1(x) = c_1 e^{2x} \\ z_2(x) = c_2 e^{5x} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z_1}{c_1}\right)^5 = \left(\frac{z_2}{c_2}\right)^2$$

$$|z_2| = C\,|z_1|^{5/2}.$$



фазов. портрет в "жордановых" координатах (z_1, z_2)

Стац. решение — неустойчивый узел. (не является асимпт. устойчивым).

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} ?$$

Ось z_1 $\rightsquigarrow$

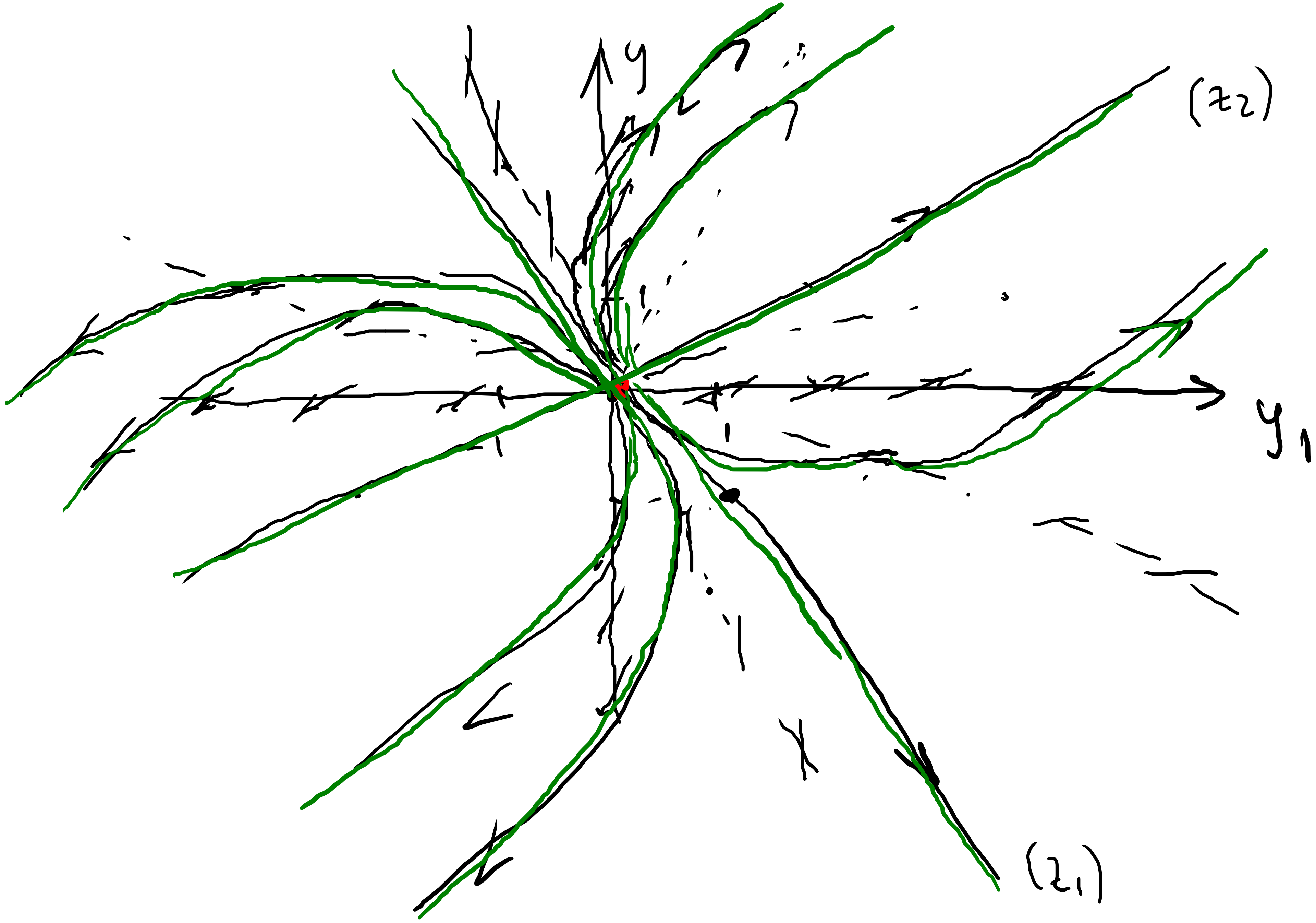
$$z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 + 0 \\ -z_1 + 0 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = -z_1 \end{cases} \qquad z_1 \in \mathbb{R}$$

Т.е. а) ось z_1 переходит в прямую, задаваемую напр. вектором, соотв. с.з. λ_1, т.е. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

б) ось z_2 переходит в — — " — — " — с.з. λ_2, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

3.2) •) $y_1 = 0$ $\quad y' = y_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

•) $y_2 = 0$ $\quad y' = y_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.3)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$y_1' = 0 \qquad 4y_1 + 2y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -2y_1$

$y_2' = 0 \Rightarrow y_1 + 3y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{3} y_1.$

Задача 2.

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 - 3y_2. \end{cases}$$

Решение

1). $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{l} \det A = \lambda_1 \lambda_2 \\ \operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 \end{array}\right.$$

2). $\sigma(A) = ?$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(4-\lambda)(3+\lambda) + 6 = 0 \iff \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}$$

3). Собств. вектора.

3.1) $\lambda_1 = -2.$ $\qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} u = -2u$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$3u_1 = u_2$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.2) $\lambda_2 = 3$ $\qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

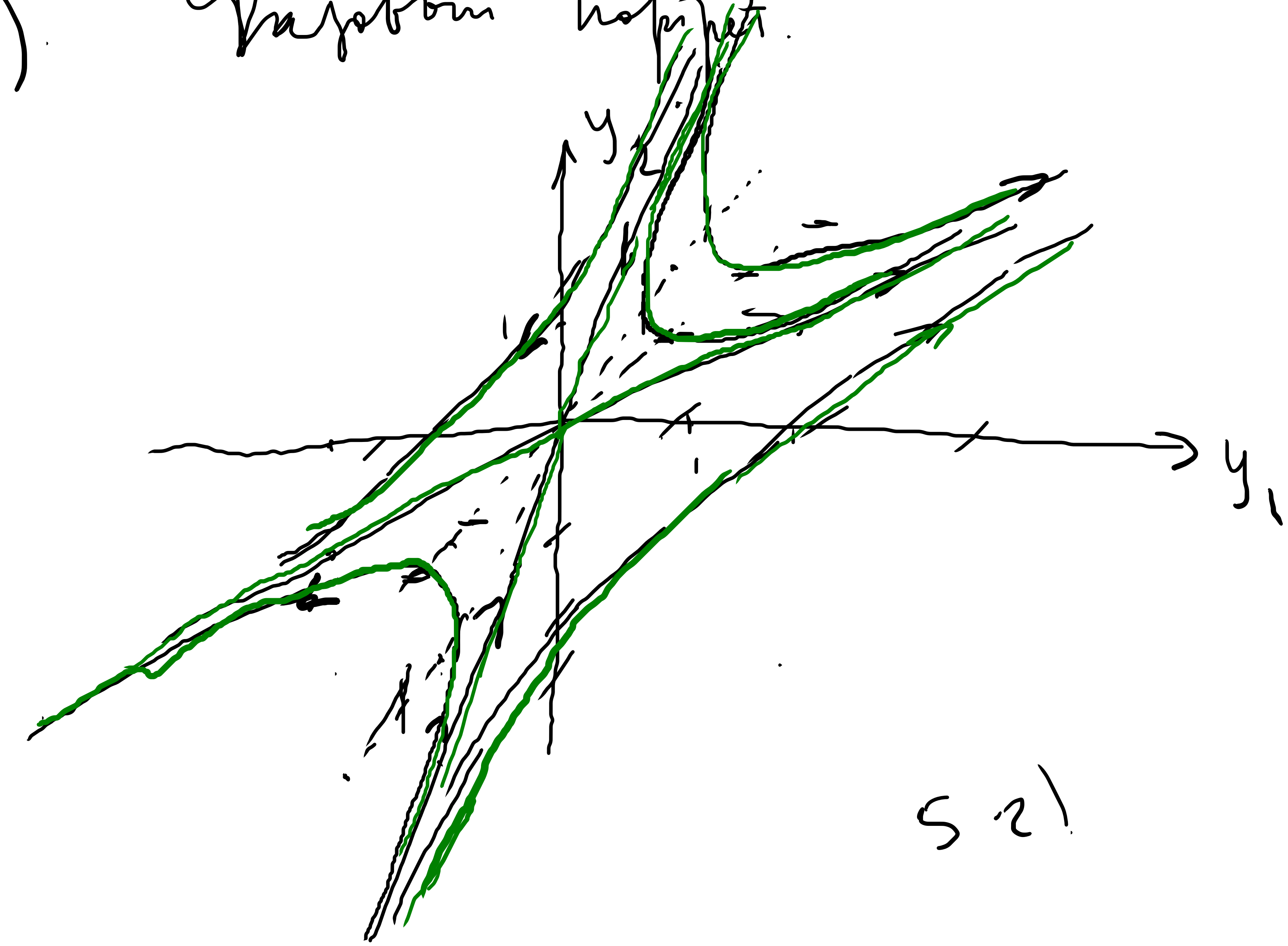
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

$$u_1 - 2u_2 = 0. \Rightarrow u_1 = 2u_2. \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4). Итого: $y(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$

седло. $\qquad$ 0 - седловая точка не явл. асимпт. устойчивой

5). Фазовый портрет.



Седло

0 – седловая точка

(асимпт. неустойчивая).

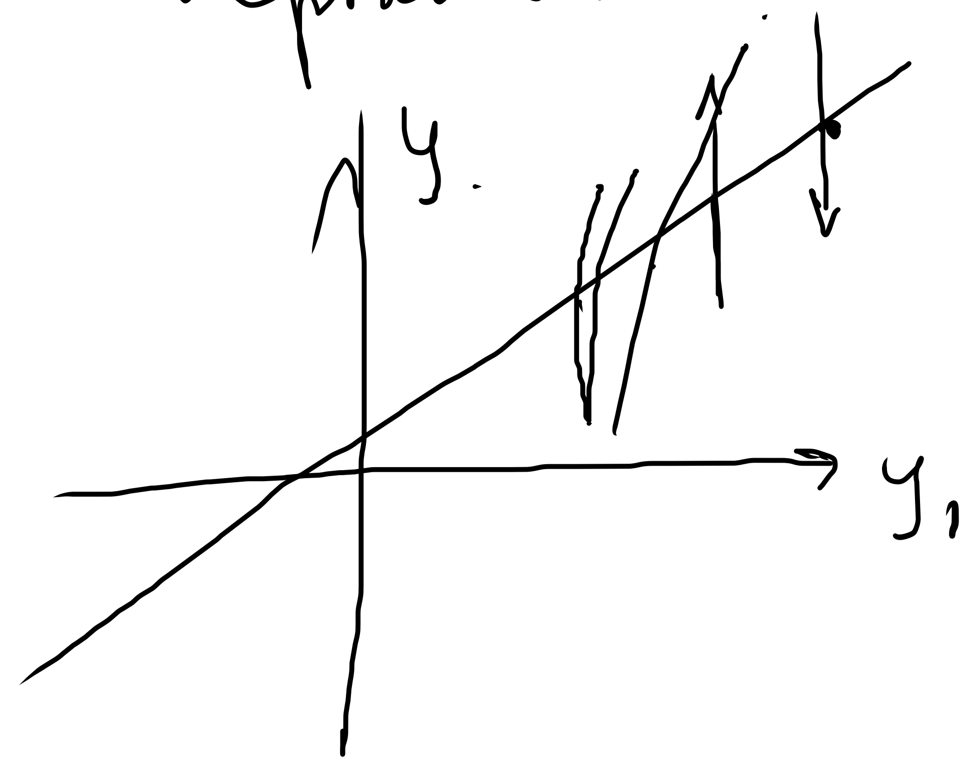
5.2) $y_1' = 0$ $\quad y' = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$4y_1 - 2y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 2y_1$$

5.3). $y_2' = 0 \Rightarrow \quad 3y_1 - 3y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = y_1.$

"Вертик" прохлипа.

Кожну траєкторію фазової лінії перетинають вертикально?



$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \qquad y_1' = 0.$$

$$y' = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2' \end{pmatrix}$$

$$y' = Ay$$

$$\boxed{a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = 0}$$

$$y' = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ \ldots \end{pmatrix}$$