

Весна 2021, анализ-2. Подготовительный вариант к контрольной работе №1.

Задача 1. Разложить функцию x в ряд Фурье по комплексной системе на $L^2(-1, 1)$.

- Сходится ли этот ряд в смысле L^2 ?
- В каких точках он сходится поточечно? К какой функции?
- Сходится ли этот ряд равномерно?
- Сходятся ли в каком-нибудь смысле его суммы Фейера? Если да, то куда?
- Не прибегая к прямому вычислению, найдите ряд Фурье функции x^2 и ответьте на вопросы выше и для этого ряда.

Задача 2. Разложите в ряд Фурье на $L^2((-\pi, \pi)^2)$ по системе $\sin kx \sin my$, $\sin kx \cos my$, $\cos kx \sin my$ и т.д. следующие функции:

a) $\sin(x + y)$, b) $f(x, y) = 1$ при $x + y \geq 0$, $f(x, y) = 0$ при $x + y < 0$.

Задача 3. Является ли множество $X_0 = \{x \in X \mid x(0) = x(1)\}$ замкнутым в пространстве

- $X = C[0, 1]$ непрерывных функций, снабженных нормой \max ;
- $X = C_2[0, 1]$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, снабженный нормой из $L^2(0, 1)$?

Задача 4. Найти ортогональную проекцию в $L^2(0, \pi)$ функции x на подпространство, натянутое на вектора $\sin x$, $\cos x$.