Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Мы знаем, что гладкая плоская кубика имеет род 1, т.е. является эллиптической кривой. Наша цель — доказать обратное утверждение.

Theorem

Всякая эллиптическая кривая реализуется некоторой гладкой плоской кубикой.

Для доказательства мы построим вложение эллиптической кривой E, представленной в виде $E = \mathbb{C}/L$, где L — некоторая решетка в $\mathbb{C}$, в плоскость, образ которого имеет степень 3. (Точнее говоря, мы построим вложение, образ которого гладкий, — такой образ неизбежно будет иметь степень 3.)

Для построения вложения нам потребуются две мероморфные функции на E; одна из них будет функцией степени 2, вторая будет иметь степень 3. Напомним, что все голоморфные функции на E постоянны, поэтому для построения отображений кривой они бесполезны — приходится пользоваться мероморфными функциями. Кроме того на E нет мероморфных функций степени 1, поэтому 2 — минимально возможная степень мероморфной функции.

Пусть решетка $L \subset \mathbb{C}$ порождена двумя $\mathbb{R}$-линейно независимыми векторами ω_1, ω_2, $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$; координату в $\mathbb{C}$ обозначим через z. Положим

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Пусть решетка $L \subset \mathbb{C}$ порождена двумя $\mathbb{R}$-линейно независимыми векторами ω_1, ω_2, $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$; координату в $\mathbb{C}$ обозначим через z. Положим

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Lemma

Функция P_L является корректно определенной мероморфной функцией на $\mathbb{C}$. Она инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L и опускается до мероморфной функции степени 2 на эллиптической кривой $E = \mathbb{C}/L$, имеющей единственный полюс порядка 2 в нуле.

Функция P_L называется *функцией Вейерштрасса* кривой $\mathbb{C}/L$ и обозначается специальной буквой $\wp$ с индексом L.

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

Доказательство. На любом компакте, не содержащем точек решетки L, ряд, определяющий функцию P_L, сходится абсолютно и равномерно:

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{2z\omega - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^3}\frac{2z - z^2\omega^{-1}}{(z\omega^{-1}-1)^2}.$$

Учитывая, что при достаточно большом $|\omega|$

$$\frac{2z - z^2\omega^{-1}}{(z\omega^{-1}-1)^2} \approx 2z,$$

заключаем, что для каждого $z \notin L$ найдется $C > 0$, т.ч.

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| < \frac{C}{\omega^3} \qquad \forall \omega \in L \setminus \{0\}.$$

Ряд $1/\omega^3$ на решетке сходится (число элементов решетки с данным $|\omega|$ линейно по $|\omega|$).

$$P_L(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right).$$

Производная функции P_L имеет вид

$$P_L'(z)=-2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Она, очевидно, инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L. Поэтому при сдвиге на элемент решетки к P_L прибавляется некоторая константа c. Подставляя $z=\pm\omega_1/2$, получаем $P_L(\omega_1/2)=P_L(-\omega_1/2)+c$, откуда $c=0$ в силу (очевидной) четности функции P_L. Теорема доказана.

$$P_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Производная функции P_L имеет вид

$$P_L'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Она, очевидно, инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L. Поэтому при сдвиге на элемент решетки к P_L прибавляется некоторая константа c. Подставляя $z = \pm\omega_1/2$, получаем $P_L(\omega_1/2) = P_L(-\omega_1/2) + c$, откуда $c = 0$ в силу (очевидной) четности функции P_L. Теорема доказана.
С этого момента функцию Вейерштрасса будем обозначать $\wp_L$. Эту функцию можно понимать и как функцию на эллиптической кривой $E = \mathbb{C}/L$, и как (дваждыпериодическую) функцию на $\mathbb{C}$.

Theorem

Функция Вейерштрасса удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(\wp_L')^2 = 4\wp_L^3 - g_2\wp_L - g_3$$

для некоторых констант g_2, g_3*, определяемых решеткой* L.

Theorem

Функция Вейерштрасса удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(\wp_L')^2 = 4\wp_L^3 - g_2\wp_L - g_3$$

для некоторых констант g_2, g_3, определяемых решеткой L.

Доказательство. Поскольку

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots,$$

имеет место разложение в ряд в окрестности точки $z = 0$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\omega}\right)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(2\frac{z}{\omega} + 3\left(\frac{z}{\omega}\right)^2 + \dots\right), \qquad \omega \neq 0.$$

Суммируя по всем ненулевым векторам решетки L, получаем разложение

$$\wp_L(z) = z^{-2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots,$$

где $G_k = \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \omega^{-k}$ (для нечетных k сумма равна 0 в силу симметрии).

$$\begin{aligned}
\wp_L(z) &= z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^2 &= z^{-4} + 6G_4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^3 &= z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \dots, \\
\wp_L'(z) &= -2z^{-3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots, \\
(\wp_L'(z))^2 &= 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \dots.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\wp_L(z) &= z^{-2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^2 &= z^{-4} + 6G_4 + \dots, \\
(\wp_L(z))^3 &= z^{-6} + 9G_4 z^{-2} + 15G_6 + \dots, \\
\wp_L'(z) &= -2z^{-3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots, \\
(\wp_L'(z))^2 &= 4z^{-6} - 24G_4 z^{-2} - 80G_6 + \dots.
\end{aligned}$$

Из этих разложений вытекает, что разложение функции

$$(\wp_L'(z))^2 - (4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6)$$

начинается не ранее, чем с члена z^2 (отметим, что эта функция четна). Тем самым, она мероморфна и не имеет полюсов на E, равна 0 при $z = 0$, а значит равна нулю тождественно. Полагаем $g_2 = 60G_4, g_3 = 140G_6$. Теорема доказана.

Функция $\wp_L : E \to \mathbb{C}P^1$ имеет степень 2 и осуществляет эллиптическое накрытие проективной прямой. Отображение $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ осуществляет биголоморфизм кривой E на гладкую плоскую кубику

$$y^2 = 4x^3 - g_2x^2 - g_3.$$

Функция $\wp_L : E \to \mathbb{C}P^1$ имеет степень 2 и осуществляет эллиптическое накрытие проективной прямой. Отображение $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ осуществляет биголоморфизм кривой E на гладкую плоскую кубику

$$y^2 = 4x^3 - g_2x^2 - g_3.$$

Замечание. Считая, что решетка L порождена векторами 1 и $\tau, \Im\tau > 0$, мы превращаем функции $G_4 = \sum'(m+n\tau)^{-4}, G_6 = \sum'(m+n\tau)^{-6}$ в функции точки τ в верхней полуплоскости. Эти функции являются примерами *модулярных форм* (*весов* 4 и 6 соответственно).

Theorem

Гладкую плоскую кубическую кривую проективной заменой переменных можно привести к виду

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

для некоторых констант g_2, g_3.

Такое уравнение кубической кривой называется *формой Вейерштрасса*.

Theorem

Гладкую плоскую кубическую кривую проективной заменой переменных можно привести к виду

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

для некоторых констант g_2, g_3.

Такое уравнение кубической кривой называется *формой Вейерштрасса*.

Доказательство. Выберем на кривой какую-нибудь из 9 точек перегиба и совместим ее с точкой $(0:1:0)$. Кроме того, потребуем, чтобы касательная в этой точке перегиба задавалась уравнением $z = 0$. Тогда уравнение кривой приобретает вид

$$y^2 - 2(ax + b)y + P_3(x) = 0,$$

где P_3 — многочлен степени 3. Заменой $y_1 = y - ax - b$ мы приводим уравнение к виду $y^2 = Q_3(x)$. Здесь Q_3 — многочлен степени 3 с попарно различными корнями. Аффинным преобразованием переменной x приводим его к желаемому виду.

Лекция 9.

Лекция 9.

Семинар 9. Задачи

- Постройте на эллиптической кривой мероморфную функцию с одним полюсом порядка 4.
- Постройте на эллиптической кривой мероморфную функцию с двумя полюсами порядка 1, не имеющую других полюсов.
- Найдите нули функции Вейерштрасса $\wp_L(z)$.
- Найдите точки ветвления функции Вейерштрасса $\wp_L(z)$.

Семинар 9. Задачи

- Пусть уравнения $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ и $y^2 = 4x^3 - g_2' x - g_3'$ задают изоморфные эллиптические кривые. Докажите, что тогда
$$\frac{g_2^3}{g_3^2 - 27g_2^3} = \frac{{g_2'}^3}{{g_3'}^2 - 27{g_2'}^3}.$$
- Пусть A, B, C — точки пересечения данной прямой с эллиптической кривой в форме Вейерштрасса. Докажите, что $A + B + C = 0$ в аддитивной группе эллиптической кривой с нулем на бесконечности.
- Докажите, что третья точка пересечения прямой, соединяющей две точки перегиба плоской кубики, также является точкой перегиба.

Семинар 9. Задачи

- Плоская *кривая Клейна* задается уравнением $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$.
(a) Докажите, что наряду с проективными преобразованиями, задаваемыми матрицами
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^4 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^5 \end{pmatrix},$$
где ζ — примитивный корень из 1, $\zeta^7 = 1$, эта кривая сохраняется также инволюцией, задаваемой матрицей
$$\frac{1}{\sqrt{-7}} \begin{pmatrix} \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 \\ \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 \\ \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 \end{pmatrix}.$$
(b) Проверьте, что эти три матрицы порождают группу порядка 168.

Семинар 9. Задачи

Семинар 9. Задачи