Симметрии действия и законы сохранения. 1-я теорема Эмми Нётер

Механическая система определена, если задано конфигурационное многообразие M с выбранными на нём обобщенными координатами q_α, $\alpha = 1, \dots, N = \dim M$, и функция Лагранжа на расширенном фазовом пространстве $L(q, \dot{q}, t) : TM \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$.

Идентичные механические системы задаются семейством лагранжианов

$$L^{(\Lambda)}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d\Lambda(q,t)}{dt}, \qquad (1a)$$

где $\Lambda(q,t)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Соответствующие этим лагранжианам действия

$$S^{(\Lambda)}[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L^{(\Lambda)}(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt \qquad (1b)$$

могут принимать различные значения, но условия их экстремальности идентичны для всех $\Lambda(q,t)$:

$$\delta S^{(\Lambda)}[q(t)] = 0 \iff \delta S^{(\Lambda=0)}[q(t)] = 0$$

Семейство лагранжианов $L^{(\Lambda)}(q,\dot q,t)$ задаётся ②
в одних и тех же координатах q_α. Мы же сейчас займёмся изучением преобразований координат, которые не меняют условий экстремальности действия.

Def Симметрией действия S называется параметризуемое непрерывным параметром ε множество преобразований Δ_ε траекторий $q_\alpha(t)$ и времени t:

$$\begin{aligned} q_\alpha(t) &\xrightarrow{\Delta_\varepsilon} \tilde q_\alpha(\tilde t) = Q_\alpha(q,t;\varepsilon), \\ t &\xrightarrow{\Delta_\varepsilon} \tilde t = \tau(q,t;\varepsilon), \end{aligned} \tag{2a}$$

такое что можно подобрать функцию $\Lambda(\tilde q,\tilde t;\varepsilon)$, чтобы тождественно выполнялось равенство

$$\boxed{S^{(\Lambda=0)}[q(t)] = S^{(\Lambda=\Lambda(\tilde q,\tilde t;\varepsilon))}[\tilde q(\tilde t)]} \tag{3a}$$

Симметрии действия, естественно, обладают групповыми свойствами: их композиция является симметрией действия; тождественное преобразование — симметрия; у каждой симметрии обратное ей преобразование тоже является симметрией.

Мы выберем параметризацию симметрии

так, чтобы она стала абелевой аддитивной группой:

$$\Delta_{\varepsilon=0} = \mathrm{id}, \text{ т.е. } \begin{cases} Q_\alpha(q,t;0) = q_\alpha \\ \tau\,(q,t;0) = t \end{cases} \quad (2b)$$

$\Delta_{\varepsilon_1} \circ \Delta_{\varepsilon_2} = \Delta_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, и в частности:

$$\Delta_{-\varepsilon} = (\Delta_\varepsilon)^{-1}, \text{ т.е. } \begin{cases} \tilde{q}_\alpha(\tilde{t}) \xrightarrow{\Delta_{-\varepsilon}} q_\alpha(t) = Q_\alpha(\tilde{q},\tilde{t};-\varepsilon) \\ \tilde{t} \xrightarrow{\Delta_{-\varepsilon}} t = \tau(\tilde{q},\tilde{t};-\varepsilon) \end{cases} \quad (2c)$$

Примечание 1: У действия S возможно имеется многопараметрическое семейство симметрий. Такое семейство естественно наделяется структурой группы Ли (групповое свойство преобразований симметрии + требование непрерывности по параметрам). Единица группы — тождественное преобразование. Всякому касательному вектору в единице группы Ли можно сопоставить однопараметрическую подгруппу (это делается, так называемым, экспоненциальным отображением). Именно такой однопараметрической подгруппой является Δ_ε

Примечание 2. Тождество (3a), верное при $\forall\varepsilon$, не подразумевает, что при $\varepsilon = 0$

$$\left.\Lambda(\tilde{q},\tilde{t};\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = \Lambda(q,t;0) = 0 \quad (3b)$$

Однако выполнения этого условия всегда можно добиться, переопределив $\Lambda(\tilde{q}, \tilde{t}; \varepsilon)$:

$$\Lambda_{\text{новое}}(\tilde{q}, \tilde{t}; \varepsilon) = \Lambda_{\text{старое}}(\tilde{q}, \tilde{t}; \varepsilon) - \Lambda_{\text{старое}}(q, t; 0)$$

Мы будем далее считать, что (3в) верно.

Примечание 3. Для удобства вычисления функционала $S[q(t)]$, да и для осмысленности физической интерпретации параметра интегрирования $\tilde{t}$ как времени необходимо потребовать, чтобы $\tilde{t}$ было монотонно возрастающей функцией t, т.е.,

$$\boxed{\frac{d\tilde{t}}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \tau}{\partial t} > 0} \qquad (4)$$

Однако, если $\dfrac{\partial \tau}{\partial q_\alpha} \neq 0$, то, очевидно, можно подобрать такую траекторию $q_\alpha(t)$, что неравенство (4) для нее будет нарушено. Выход из этого неудовлетворительного положения такой: нас интересуют не любые траектории, а траектории, находящиеся в близкой окрестности экстремали действия – решения уравнений Эйлера-Лагранжа. Для решения уравнений Э.-Л. выполнение условий (4) можно проверять a posteriori. Впрочем, обычно на практике $\partial \tau / \partial q_\alpha \equiv 0$.

В 1918 г. на семинаре в Геттингенском университете Эмми Нётер (Amalie Emmy Noether) рассказала теорему, связывающую симметрии действия с интегралами движения механической системы. Эта теорема оказала большое влияние на дальнейшее развитие теоретической физики. Действия для фундаментальных физических моделей теперь конструируют, руководствуясь, в первую очередь, его симметриями, которые порождают требуемые законы сохранения.

Отступление: Во времена Э. Нётер женщине в Германии (и не только) практически невозможно было занять академическую позицию. После защиты диссертации она бесплатно преподавала в Университете Эрлангена в течение 7 лет. В 1915 г. была приглашена в университет Геттингена Феликсом Клейном и Давидом Гильбертом, однако назначение ее приват-доцентом было провалено профессорами-историками и филологами. Гильберт по этому поводу недоумевал: "Не понимаю, почему пол кандидата может препятствовать назначению на должность приват-доцента? В конце концов, мы университет, а не баня"! В 1919 г. Э. Нетер смогла стать приват-доцентом в Геттингене, с 1922 г. внештатным профессором. В 1933 г. после прихода к власти нацистов, ее, как еврейку, отстранили от преподавания.

Теорема Э. Нётер

Всякой симметрии действия (2 а,в,с), (3а,в) можно сопоставить интеграл движения системы (закон сохранения):

$$\boxed{\frac{dI(q,\dot q,t)}{dt} \overset{L_\alpha}{=} 0,} \qquad (5)$$

Имеется в виду, что равенство верно для $q_\alpha(t)$, являющихся решениями уравнений Э.-Л.: $L_\alpha = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right)L = 0$

где

$$\boxed{I(q,\dot q,t) = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\xi_\alpha + \left(L - \dot q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right)\xi_0 + \lambda} \qquad (6a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_\alpha(q,t) &= \left.\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\\
\xi_0(q,t) &= \left.\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\\
\lambda(q,t) &= \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},
\end{aligned}\right. \qquad (6в)$$

Q_α, τ, Λ – функции из (2а) и (3а)

Доказательство:

Согласно условиям теоремы функционал

$$\boxed{\Phi[q(t);\varepsilon] = S^{(\Lambda)}[\tilde{q}(\tilde{t})] - S^{(0)}[q(t)] \equiv 0,} \quad (7)$$

причем $\Lambda(\tilde{q},\tilde{t};\varepsilon)$ мы можем выбрать и выберем таким образом, чтобы выполнялось условие (3б):

$$\Lambda(q,t;0) = 0 \, .$$

Рассмотрим разложение Φ в ряд по ε в окрестности $\varepsilon = 0$. Нас интересует линейный по ε член. Для его вычисления нам потребуются линейные по ε члены в разложении $\tilde{t} - t$ и $\tilde{q} - q$:

$$\boxed{\delta_\varepsilon t} = \tilde{t} - t = \varepsilon \left.\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon \, \xi_0(q,t) + o(\varepsilon)$$

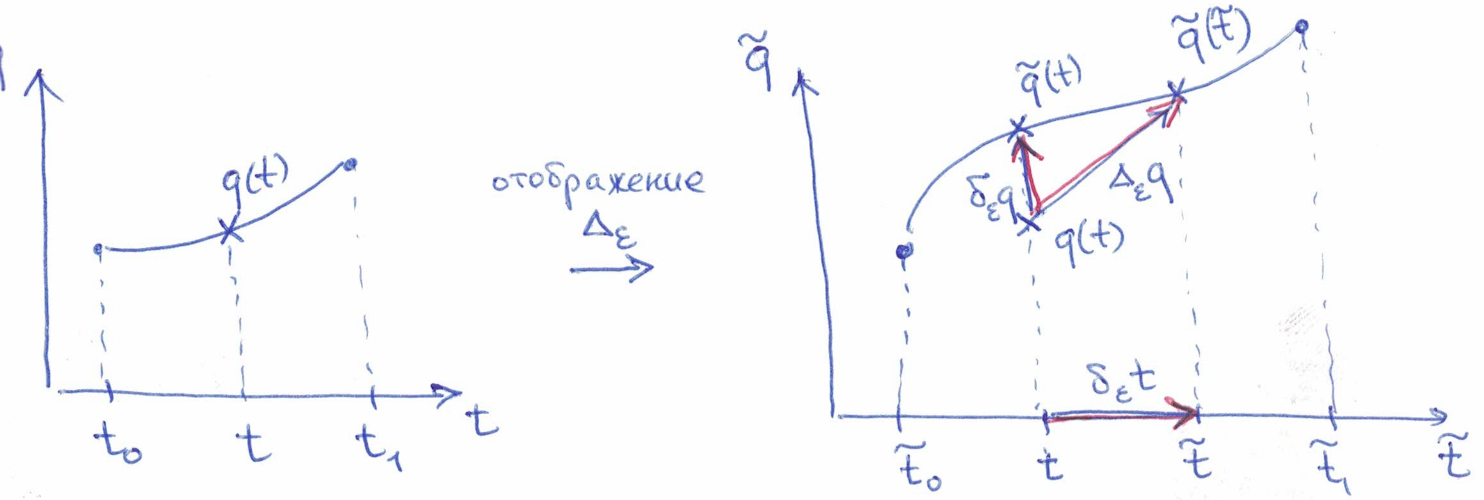
Для $q_\alpha(t)$ можно устроить два вида вариаций по ε:

$$\boxed{\Delta_\varepsilon q_\alpha} = \tilde q_\alpha(\tilde t) - q_\alpha(t) = \varepsilon \left.\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon) = \varepsilon\, \xi_\alpha(q,t) + o(\varepsilon)$$

$$\boxed{\delta_\varepsilon q_\alpha} = \tilde q_\alpha(t) - q_\alpha(t) = -\left(\tilde q_\alpha(\tilde t) - \tilde q_\alpha(t)\right) + \left(\tilde q_\alpha(\tilde t) - q_\alpha(t)\right) =$$

$$= -\left.\frac{d\tilde q_\alpha}{d\tilde t}\right|_{\tilde t = t} \cdot \delta_\varepsilon t + \Delta_\varepsilon q_\alpha + o(\varepsilon) = \varepsilon\left(\xi_\alpha(q,t) - \xi_0(q,t)\,\dot q_\alpha(t)\right) + o(\varepsilon)$$

Графически вариации $\delta_\varepsilon t$, $\Delta_\varepsilon q$, $\delta_\varepsilon q$ выглядят так:



Теперь вычислим первый член в разложении $\Phi[q(t),\varepsilon]$ в ряд по ε:

$$\Phi[q(t),\varepsilon] = \int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2} \left\{ L\left(\tilde q, \frac{d\tilde q}{d\tilde t}, \tilde t\right) + \frac{d(\Lambda(\tilde q,\tilde t))}{d\tilde t} \right\} d\tilde t - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt$$

$$= \Lambda(\tilde q,\tilde t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \left(\int_{\tilde t_1}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{\tilde t_2} \right) L\left(\tilde q, \frac{d\tilde q}{d\tilde t}, \tilde t\right) d\tilde t - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt$$

$$= \left(\varepsilon \lambda(q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} + o(\varepsilon) \right) + \left(L(q,\dot q,t)\,\delta_\varepsilon t \Big|_{t_1}^{t_2} + o(\varepsilon) \right) + \int_{t_1}^{t_2} \left(L\left(\tilde q, \frac{d\tilde q}{dt}, t\right) - L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) \right) dt$$

$$= \varepsilon\{\lambda + L\cdot\xi_0\}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \underbrace{\frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial \dot q_\alpha}\delta \dot q_\alpha\Big)}_{\text{интегрировать по частям}} dt + o(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\{\lambda + L\cdot\xi_0\}\Big|_{t_1}^{t_2} + \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\delta q_\alpha\Big)\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\underbrace{\Big(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\Big)}_{\substack{\shortparallel \\ -L_\alpha \text{ — уравнения движения}}}\delta q_\alpha dt + o(\varepsilon)$$

$$\overset{L_\alpha}{=\!=} \varepsilon\Big\{\lambda + L\cdot\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}(\xi_\alpha - \dot q_\alpha\xi_0)\Big\}\Big|_{t_1}^{t_2} + o(\varepsilon)$$

равенство на уравнениях движения

$\overset{L_\alpha}{=} \varepsilon\, I(q,\dot q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} + o(\varepsilon)$. По условию теоремы это выражение $= 0$ при $\forall\varepsilon$. Следовательно

$$I(q,\dot q,t)\Big|_{t_1}^{t_2} \overset{L_\alpha}{=\!=} 0,$$

что эквивалентно утверждению теоремы (5) ■

Разберем несколько примеров применения теоремы Нётер. Все эти примеры связаны с переходами от одной инерциальной системы отсчета к другой.

1 Трансляции.

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{t} &= t \\ \tilde{q}_\alpha &= q_\alpha + \varepsilon_\alpha \end{aligned}} \tag{8}$$

$\alpha = 1 \ldots N$. При каждом значении индекса α имеем независимый параметр преобразования ε_α. Так что здесь N разных трансляций.

Если лагранжиан системы инвариантен относительно преобразований (8), то есть если

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$$

то (8) – симметрия действия, и соответствующие интегралы движения (6) имеют вид ($\xi_0 = 0$, $\xi_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, $\lambda = 0$)

$$\boxed{P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}} \tag{8a}$$

Этот интеграл движения – сохраняющийся импульс системы, отвечающий координате q_α, нам уже знаком

2 Трансляции по времени

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \tilde t = t - \varepsilon \\ \tilde q_\alpha = q_\alpha\,, \quad \alpha = 1..N \end{array}\right.$$

Если лагранжиан системы инвариантен относительно преобразований (9), то есть если

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

то (9) — симметрия действия, а соответствующий интеграл движения (6) имеет вид ($\xi_0 = -1, \xi_\alpha = \lambda = 0$)

$$(9a)\quad \boxed{E = -L + \dot q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}}$$

Это — энергия системы — тоже знакомый нам закон сохранения

3 Вращения пространства

Рассмотрим менее тривиальные преобразования, которые образуют неабелеву группу Ли — группу вращений. Вращения — это $\mathbb{R}$-линейные преобразования пространства ($\mathbb{R}^3$ или в более общем случае $\mathbb{R}^N$), сохраняющие Эвклидово скалярное произведение (т.е. расстояние между точками).

Оси задаются ортогональными матрицами

$$\boxed{O^T O = \mathrm{id}}$$

Нас интересуют собственные преобразования вращения: $\det O = 1$ (без отражений)

Всякое такое преобразование может быть представлено в виде

$$\boxed{O = e^{\Omega}}, \text{ где}$$

Ω – кососимметрическая матрица: $\Omega^T = -\Omega$.

Действительно, т. к. $(e^{\Omega})^T = e^{\Omega^T}$ и $(e^{\Omega})^{-1} = e^{-\Omega}$, то условие $(e^{\Omega})^T = (e^{\Omega})^{-1}$ эквивалентно

$$\boxed{\Omega^T = -\Omega}$$

Семейство преобразований $O(\tau) = e^{\tau\Omega}$, где $\Omega^T = -\Omega$, является однопараметрической подгруппой (параметр τ) группы вращений, причем $O(\tau = 0) = \mathrm{id}$. Мы предположим, что лагранжиан мех. системы инвариантен относительно преобразований этого семейства:

(10) $$\begin{cases} \tilde{t} = t \\ \tilde{q}_\alpha = \left(e^{\tau\Omega}\right)_{\alpha\beta} q_\beta \,, \quad \Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha} \end{cases}$$

Соответствующий такой симметрии действия

($\xi_0 = \lambda = 0$, $\xi_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} q_\beta$, т.к. $\left.\frac{\partial \tilde{q}_\alpha}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \Omega_{\alpha\beta} q_\beta$)

интеграл движения (6) имеет вид:

(10a) $$\boxed{I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \Omega_{\alpha\beta} q_\beta = P_\alpha \Omega_{\alpha\beta} q_\beta}$$

Этот интеграл движения — обобщенный момент импульса системы.

Разберем его конструкцию более подробно в $\mathbb{R}^3$:

Пространство кососимметрических 3×3 матриц трёхмерно. Выберем в нём базис

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Соответствующие им вращения $e^{\varphi\omega_i}$ — повороты на угол φ вокруг i-ых координатных осей.

Например:

$$e^{\varphi\omega_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Произвольная кососимметрическая 3×3 матрица в базисе $\{\omega_i\}$ имеет вид

$$\omega = n_i \omega_i .$$

Ей отвечает семейство преобразований

$$\boxed{O(\varphi) = e^{\varphi(n_i \omega_i)}} \qquad (11)$$

Если считать, что n_i — координаты единичного вектора $\vec{n}$: $|\vec{n}|=1$, то $O(\varphi)$ — это поворот на угол φ вокруг оси вектора $\vec{n}$ (Это так, поскольку $O(\varphi)\vec{n} = \vec{n}$, или $(n_i\omega_i)\vec{n}=0$, то есть при вращениях $O(\varphi)$ вектор $\vec{n}$ не преобразуется).

Подействуем преобразованием $O(\varphi)$ (11) на радиус-вектор $\vec{r}$ материальной точки в $\mathbb{R}^3$:

$$(11)\quad \left|\begin{array}{l} \tilde{\vec{r}} = e^{\varphi(n_i\omega_i)}\vec{r}, \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \tilde{t} = t \end{array}\right.$$

$$\delta\vec{r} = \tilde{\vec{r}} - \vec{r} = \varphi\underbrace{(n_i\omega_i)}_{\begin{pmatrix} \cdot & -n_3 & n_2 \\ n_3 & \cdot & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & \cdot \end{pmatrix}}\vec{r} + o(\varphi) =$$

$$= \varphi\begin{pmatrix} n_2 z - n_3 y \\ n_3 x - n_1 z \\ n_1 y - n_2 x \end{pmatrix} + o(\varphi) = \varphi[\vec{n}, \vec{r}] + o(\varphi)$$

Если лагранжиан системы, в которой "живёт" материальная точка $\vec{r}$ инвариантен относительно преобразований (11), то такой симметрии действия отвечает интеграл движения (6) вида:

$$I = \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}}_{\text{импульс материальной точки } \vec{r}}, [\vec{n}, \vec{r}]\right) = \left([\vec{n}, \vec{r}], \vec{p}\right), \text{т.е.}$$

$$(11) \quad \boxed{I = \left(\vec{n}, [\vec{r}, \vec{p}]\right)}$$

Это проекция момента импульса материальной точки $\boxed{\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]}$ на ось $\vec{n}$.

Вывод: всякому преобразованию перехода между инерциальными системами отсчёта соответствует ВАЖНЫЙ закон сохранения:

А) трансляциям (однородность пространства) — закон сохранения импульса системы

Б) трансляции времени (однородность времени) — закон сохранения энергии системы

В) вращениям (изотропность пространства) — закон сохранения момента импульса системы

Заметим, что у каждой конкретной механической системы могут быть дополнительные симметрии, помимо тех, что гарантированы постулатом об инерциальных системах отсчёта (принцип относительности). Таким дополнительным симметриям теорема Нётер сопоставляет дополнительные интегралы движения.

А что с переходом в равномерно и прямолинейно движущиеся системы отсчета?

Соответствующее преобразование имеет вид

$$(12а)\quad \begin{cases} \vec{\tilde{r}} = \vec{r} + \varepsilon \vec{v} t \\ \tilde{t} = t \end{cases},$$

$\vec{v}$ – постоянный вектор, указывающий направление движения новой системы отсчёта. $\varepsilon\vec{v}$ – его скорость.

Лагранжиан и действие даже свободной частицы не инвариантны при таких преобразованиях:

$$L_{св.ч.}(\dot{\vec{\tilde{r}}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{\tilde{r}}}^2 = L_{св.ч}(\dot{\vec{r}}) + \varepsilon m(\vec{v},\dot{\vec{r}}) + \frac{\varepsilon^2 m}{2}\vec{v}^2$$

Чтобы действие свободной частицы имело (12а) своей симметрией, надо сделать Λ-поправку к лагранжиану:

$$\boxed{\Lambda(\vec{r};\varepsilon) = -\varepsilon m(\vec{v},\vec{r})} \quad (12б)$$

Тогда $L^{(\Lambda)}_{св.ч.}(\dot{\vec{\tilde{r}}}) = L_{св.ч}(\dot{\vec{\tilde{r}}}) + \dfrac{d\Lambda(\vec{\tilde{r}};\varepsilon)}{dt} =$

$$= L_{св.ч}(\dot{\vec r}) - \underbrace{\frac{\varepsilon^2 m}{2}\vec v^{\,2}}_{=const}\,, \text{ и поэтому}$$

$$\boxed{S^{(\lambda)}_{св.ч}[\vec r(t)] = S^{(\lambda=0)}_{св.ч}[\vec r(t)]}$$

Соответствующий нётеровский интеграл движения имеет вид ($\xi_\lambda \equiv \vec\xi = \vec v t$; $\xi_0 = 0$; $\Lambda = -m(\vec v, \vec r)$):

$$\boxed{I = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}}, \vec v t\right) - m(\vec v, \vec r) = m(\{\dot{\vec r} t - \vec r\}, \vec v)} \tag{12c}$$

Сохранение I – это утверждение о том, что проекция вектора $\dot{\vec r}(t)\cdot t - \vec r(t)$ на направление $\vec v$ сохраняется.

Это утверждение является следствием закона сохранения проекции импульса частицы $\vec p(t) = m\dot{\vec r}(t)$ на направление $\vec v$

$$(\dot{\vec r}, \vec v) = const \Rightarrow (\dot{\vec r}\cdot t - \vec r, \vec v) = const$$

Таким образом преобразования перехода в движущуюся систему отсчёта (12) не дают новых независимых интегралов движения. Их интегралы движения следуют из закона сохранения импульса.

Теорема Нётер <u>не гарантирует</u> независимость интегралов движения, отвечающих независимым преобразованиям симметрии.