

Семинар 8.

Везде в задачах основное поле \mathbf{k} алгебраически замкнуто характеристики 0, $(x_0 : \dots : x_n)$ - однородные координаты в пространстве \mathbb{P}^n , $F(x_0, \dots, x_n)$ - форма степени d от переменных x_0, \dots, x_n . Через $V(F)$ будем обозначать гиперповерхность $X = \{F(x_0, \dots, x_n) = 0\}$ в \mathbb{P}^n .

Задача 1. Пусть $a = (a_0 : \dots : a_n)$ и $b = (b_0 : \dots : b_n)$ - две различные точки в \mathbb{P}^n . Как мы знаем,

$$F(b + \lambda a) = F(b) + \frac{\lambda}{1!}(D_a F)(b) + \frac{\lambda^2}{2!}(D_a^2 F)(b) + \dots + \frac{\lambda^d}{d!}(D_a^d F)(b), \quad \lambda \in \mathbf{k}$$

где $D_a F = \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ - оператор поляризации. Рассмотрим многочлен $f(x_1, \dots, x_n) := F(1, x_1, \dots, x_n)$. Этот многочлен уже не является однородным, поэтому можно разложить его на однородные слагаемые (формы) f_k , где $k = \deg f_k$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_d, \quad f_0 = F(1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{k}, \quad f_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad f_2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j, \dots \quad (1)$$

- 1) Покажите, что коэффициенты α_i в линейной форме f_1 имеют вид: $\alpha_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$.
- 2) Выведите отсюда, что $b = (1 : 0 : \dots : 0) \in \text{Sing} X$ (то есть b является особой точкой на X) тогда и только тогда, когда $f_0 = 0$ и $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, то есть когда $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи рассмотрим случай $n = 2$, то есть $X = V(F)$ - кривая на плоскости \mathbb{P}^2 , и, упрощая обозначения, положим $x = x_1$, $y = x_2$. Можно считать (x, y) аффинными координатами в аффинной карте $U = \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 = 0\}$. В этой карте точка b имеет координаты $(0, 0)$. Пусть $b \in \text{Sing} X$, так что в разложении (1) имеем $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$, а $f_2 \not\equiv 0$, то есть это разложение начинается с ненулевой квадратичной формы $f_2 = \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2$. Так как поле \mathbf{k} алгебраически замкнуто, то форма f_2 разлагается в произведение двух ненулевых линейных форм: $f_2 = L_1(x, y) \cdot L_2(x, y)$, где $L_i(x, y) = \gamma_i x + \delta_i y$, $i = 1, 2$. Линейные формы L_1 и L_2 определяют в \mathbb{P}^2 прямые $l_i = V(L_i)$, $i = 1, 2$, проходящие через точку b . Точка b называется *обыкновенной двойной точкой* кривой X , если формы L_1 и L_2 непропорциональны, то есть если прямые l_1 и l_2 различны. Пусть b - обыкновенная двойная точка кривой X , и пусть точка a не лежит ни на X , ни на прямых l_1 и l_2 . Обозначим $m_1 = \langle a, b \rangle$.

- 1) Проверьте, что $b \in P_a(X)$, но $b \notin \text{Sing} P_a(X)$.
- 2) Так как b - неособая точка на поляре $P_a(X)$, то, значит, $m_2 := \mathbb{T}_b P_a(X)$ - прямая. Докажите, что пара прямых l_1, l_2 гармонически делит пару прямых m_1, m_2 , то есть l_1, l_2, m_1, m_2 - гармоническая четверка прямых.

Задача 3. 1) Пусть X - гиперповерхность в \mathbb{P}^n , $b \in \text{Sing} X$. Докажите, что $b \in P_a(X)$ для произвольной точки $a \in \mathbb{P}^n$.

- 2) При $k \geq 2$ точка $b \in X$ называется *особой точкой кратности k* на X , если в разложении (1) $f_0 \equiv f_1 \equiv \dots \equiv f_{k-1} \equiv 0$, но $f_k \not\equiv 0$. Докажите, что для точки b кратности k на X и произвольной точки $a \in \mathbb{P}^n$ верно включение $b \in P_a(X) \cap P_{a^2}(X) \cap \dots \cap P_{a^{k-1}}(X)$.

Задача 4. Пусть уравнение кубической кривой X в \mathbb{P}^2 приведено в аффинной карте U (см. обозначения в задаче 2) к *нормальной форме Вейерштрасса*

$$y^2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{k}, \quad (2)$$

Докажите, что X неособа тогда и только тогда, когда скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ различны.

Задача 5. Пусть X - гладкая кубика в \mathbb{P}^2 . Точка $a \in X$ называется *точкой перегиба*, если касательная прямая $\mathbb{T}_a X$ не имеет с X других точек пересечения, кроме a . (Другими словами, в точке перегиба касательная имеет с X 3-кратную точку пересечения.)

1) Найдите число точек перегиба на кубике X .

2) Проверьте, что вышеуказанное определение точки перегиба совпадает с определением точки перегиба в математическом анализе, то есть существует окрестность \mathcal{U} точки перегиба a такая, что уравнение кубики $X \cap \mathcal{U}$ в окрестности \mathcal{U} может быть записано в виде $y = \varphi(x)$ таком, что $\varphi''(a) = 0$.

Задача 6. В условиях предыдущей задачи сколько различных касательных к кубике проходит через точку? (Воспользуйтесь свойствами первой поляры.) Можно ли эти касательные нарисовать на рисунке?

Задача 7. Как следует из задачи 4, всякая кубика с уравнением (2), в котором не все α_i различны, является особой. Всякая ли особая кубика (кроме распавшихся кубик, то есть кубик, распавшихся на гладкую конику и прямую, либо на три прямые, не обязательно различные) задается уравнением (2), в котором не все α_i различны?