1

$$f: S^1 \to \mathbb{C} \quad \longmapsto \quad \hat{f}: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

$$f = f(x) \qquad \hat{f} = \hat{f}(k)$$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad \longleftarrow\!\!| \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

Аналогично: $\mathbb{T}^n \to \mathbb{Z}^n$

Замечание 1. Более общая ситуация

$$f: \mathbb{T}^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots \times}_{n \text{ раз}} S^1 \to \mathbb{C} \quad \longmapsto \quad \hat{f}: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$$

$$f = f(x), \quad x \in \mathbb{T}^n \qquad \hat{f} = \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat f(k)\, e^{ik\cdot x} \longleftarrow\!\!\mapsto \quad \hat f(k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx$$

Замечание 2.

$\frac{1}{(2\pi)^n}$ можно при желании заменить на то, что предпочтёте.

$$\hat f(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat f(k)\, e^{ik\cdot x}$$

Найдёте в разных текстах (учебниках, статьях, книгах) по-разному.

Замечание 3. Когда все эти ф-лы выполнены? (и в каком смысле).

$\cdot)$ $f \in L^1(\mathbb{T}^n) \Rightarrow \hat{f}$ опред. корректно

$\hat{f} \in C_0$

$L^2(\mathbb{T}^n) \cap L^1(\mathbb{T}^n)$

$\cdot)$ Самая "простая" и ПОЛНАЯ теория для $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$

$$f \in L^2(\mathbb{T}^n) \Leftrightarrow \hat{f} \in \ell^2$$

и, кстати, можно использовать и другие системы ортогон. ф-ций.

•) Полезно рассм. ряды Фурье в смысле обобщенных функций.

Напр., если $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)\, e^{ik\cdot x}$ сход. в $L^2(\mathbb{T}^n)$ (или даже в L^1)

то он сход. и в $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$

тут сходимость
ОЧЕНЬ слабая

Замечание 4. Зачем все это нужно? → Было придумано

→ нужно сейчас.

→ Было придумано для решений Д.У. (в частности Ур. Ч.П.).

→ Очень часто ("почти во всех разумных случаях") реш. Ур. Ч.П. в виде ряда Фурье — обобщенное решение (в смысле $\mathcal{D}'$).

→ А сейчас применяется везде очень много где (!)

Попробуем сделать очень похоже.

∘) $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \longmapsto \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$$

$k \in \mathbb{R}$

∘) Более общий n-мерный случай:

$f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \longmapsto \hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx$$

$k \in \mathbb{R}^n$

Пространство:

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\hat{f}(k) = (\mathcal{F} f)(k).$$

Th. $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f}$ корректно опред., $\hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$

непр., огр.

Д-во: 0) $\left| f(x)\, e^{-ik\cdot x} \right| \le |f(x)|.$

$$|\hat{f}(k)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(x)\, e^{-ik\cdot x} \right| dx \le$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1 .$$

$\Rightarrow \hat{f}$ ограничено.

в). $\hat{f}$ – непр.: $k_\nu \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{\nu \to \infty} k_\nu = k \in \mathbb{R}^n$

$\nu \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\nu \to \infty} \hat{f}(k_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i k_\nu \cdot x}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i k \cdot x}\, dx = \hat{f}(k)$$

$$\left| f(x) e^{i k_\nu \cdot x} \right| \leq |f(x)|$$

по теор. Лебега

dominated convergence.

ч.т.д.

Полезное замечание: если $f \geq 0$

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left|e^{ik\cdot x}\right| dx \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f}(0).$$

Важно: $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightsquigarrow C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$

А хочется ещё $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \overset{?}{\rightsquigarrow} L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$

$$\boxed{L^1 \not\supseteq L^2 \quad L^2}$$

Цель: calculus преобр. Фурье.

Св-ва $\mathcal{F}$

1° $\boxed{\widehat{(f\circ A)} = \frac{1}{\det A}\hat{f}\circ(A^{-1})^T}$

$f \rightsquigarrow \hat{f}$, $g(x) = f(Ax)$, A - обратимая матрица.

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(\underbrace{Ax}_{z})e^{-ik\cdot x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{1}{\det A}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-ik\cdot A^{-1}z}\,dz = \frac{1}{\det A}\,\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-i(A^{-1})^T k\cdot z}\,dz$$

$z = Ax$
$x = A^{-1}z$
$dx = \det A^{-1}\,dz$

2°) В частности, если $A \in SO(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{f \circ A} = \hat{f} \circ A.$$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ рад. симм., если $\varphi(x) = \psi(|x|)$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\varphi(Ox) =$ который; $= \varphi(x)$

3°) f — радиально симметрична $\Rightarrow \hat{f}$ радиально симметрична.

Д-во: $k \in \mathbb{R}^n$ $\quad Ok = (|k|, 0, \ldots, 0)$.

$$f \circ O = f \Rightarrow \hat{f}(k) = \widehat{f \circ O}(k) = \hat{f}(Ok) = \hat{f}((|k|, 0, \ldots, 0)).$$

25.5

4°) $(\delta_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$

гомотетия пр-ва $\mathbb{R}^n$.

dilation. (растяж./сжатие).

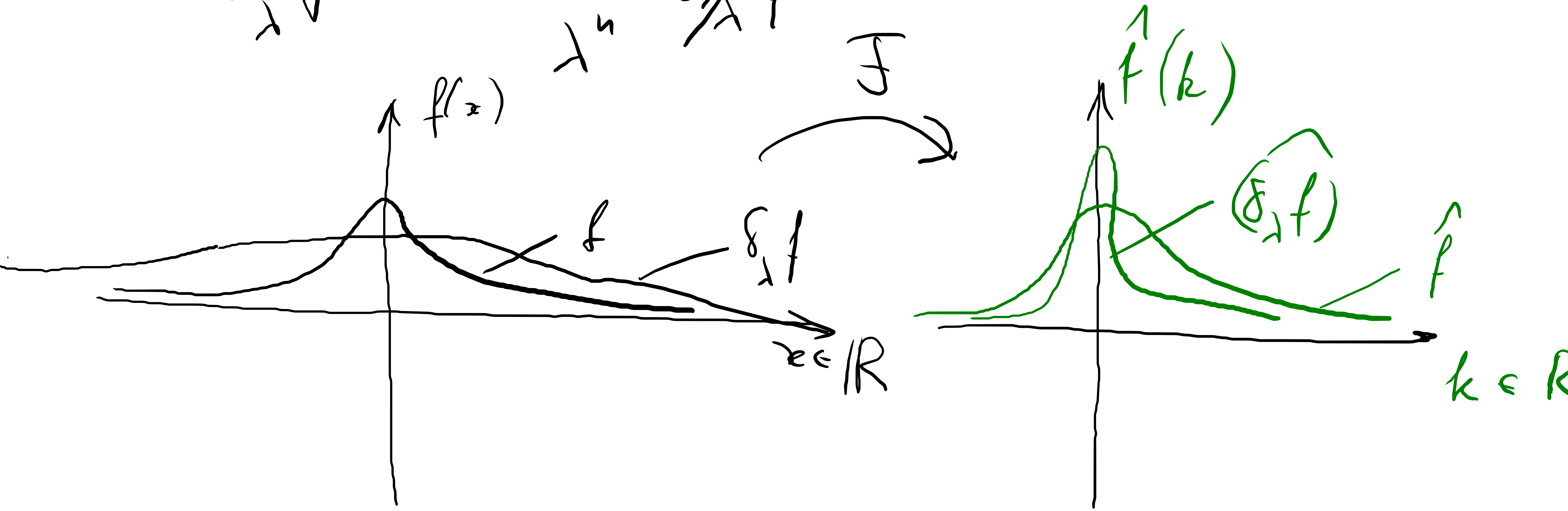
$\delta_\lambda f$: $\quad A = \lambda\, Id.$

$\det A = \frac{1}{\lambda^n}$

$(A^{-1})^T = \frac{1}{\lambda}\, Id.$

$$\widehat{\delta_\lambda f}(k) = \frac{1}{\det A}\hat{f}\left((A^{-1})^T k\right) = \frac{1}{|\lambda|^n}\hat{f}(k/\lambda).$$

$$\widehat{\delta_\lambda f} = \frac{1}{\lambda^n}\,\delta_{1/\lambda}\hat{f}$$



5°

$$(T_h f)(x) := f(x-h) \qquad h \in \mathbb{R}^n$$

$$\widehat{T_h f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\underbrace{x-h}_{z})\, e^{-ik\cdot x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, e^{-ik\cdot(z+h)}\, dz =$$

$$= e^{-ik\cdot h}\, \hat{f}(k)$$

6°) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\quad f \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$f_{x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\widehat{f_{x_j}}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_{x_j}(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx =$$

$$k \cdot x = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i k\cdot x}\, dx + \cancel{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[f e^{-ik_j x_j} \right]_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-1}}$$

OK

no feeh x depen x_j

$$= +\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, i k_j\, e^{-ik\cdot x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, i k_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ik\cdot x}\, dx =$$

$$= i k_j \hat{f}(k).$$

Итак $\hat{f}_{x_j}(k) = i k_j \hat{f}(k).$

6°) В частности, $\widehat{D^\alpha f} = i^{|\alpha|} k^\alpha \hat{f}(k)$

$$k^\alpha = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \ldots k_n^{\alpha_n}$$