$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$$

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A) = \{ \lambda_1, \lambda_2 \} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \vdots$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \qquad \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$$

$$\lambda_1 = \mu + i\omega \qquad \mu, \omega \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = \mu - i\omega$$

$\lambda_1 \qquad \lambda_2$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$v_1 \qquad v_2$

$$A v_1 = \lambda v_1$$

$$A v_2 = \lambda v_2.$$

$$\dot{x} = Ax$$

Один из способов записать решение — искать его в виде

$$x = y e^{\lambda t}$$

$y \in \cancel{\mathbb{R}^2}\ \mathbb{C}^2,\ \lambda \in \mathbb{C}$

$$y \lambda \cancel{e^{\lambda t}} = A y \cancel{e^{\lambda t}}$$

$Ay = \lambda y \Rightarrow y$ - с. вектор A соотв. с. з. λ.

$$x(t) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

А что если λ_1, λ_2 - комплексно сопряженные.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$v_1, \quad v_2 \in \mathbb{C}^2,$$

$$x(t) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

тут все комплексные

а это $\nexists$ верно! (если $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$)

N.B. $x(t)$ – решение (комплексное)

$x(t) = p(t) + i\,q(t)$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

комплексн. знач. вещественнозначн.

$\Rightarrow$ $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ тоже решения.

$$\dot{x} = \underline{\dot{p} + i\dot{q}} = Ax = \underline{Ap + i\,Aq}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\dot{p} = Ap, \quad \dot{q} = Aq.}$$

Т.о., если $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, то дост. найти только λ_1, v_1.

$$v_1 = a + ib, \quad \lambda_1 = \mu + i\omega$$

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} = (a+ib)\, e^{\mu t + i\omega t} =$$

$$= e^{\mu t}(a+ib)(\cos\omega t + i \sin\omega t) =$$

$$= \underbrace{e^{\mu t}(a\cos\omega t - b\sin\omega t)}_{\text{реш}_1} + i\,\underbrace{e^{\mu t}(b\cos\omega t + a\sin\omega t)}_{\text{реш}_2}$$

$$x(t) = C_1 e^{\mu t}\left(a\cos\omega t - b\sin\omega t\right) + C_2 e^{\mu t}\left(b\cos\omega t + a\sin\omega t\right)$$

$\in \mathbb{R}$

$\in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}x - y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases} \qquad \bar{x} = (x, y)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a).

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)(-1-\lambda) + 1 = 0$$

$$\lambda^2 + \underbrace{\frac{1}{2}}\lambda + \frac{1}{2} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i\,\frac{\sqrt{7}}{4}$$

•) $\lambda_1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}\right) & -1 \\ 1 & -1 - \left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0.$$

$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4} & -1 \\ 1 & -\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\alpha_1 - \alpha_2 = 0. \implies \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{7}}{4} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{4} + i\sqrt{7}/4$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t/4} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{7}}{4}t + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{7}/4 \end{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{7}}{4}t \right)$$

$$C_2 e^{-t/4} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{7}}{4}t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{7}}{4} \end{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{7}}{4}t \right)$$

I.e.

$$x(t) = C_1 e^{-t/4} \cos\frac{\sqrt{7}t}{4} + C_2 e^{-t/4} \sin\frac{\sqrt{7}t}{4}$$

$$y(t) = C_1 e^{-t/4}\left(\frac{3}{4}\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t + \frac{\sqrt{7}}{4}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) +$$

$$+ C_2 e^{-t/4}\left(\frac{3}{4}\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t - \frac{\sqrt{7}}{4}\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) =$$

$$= C_1 e^{-t/4} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t + \varphi_1\right) + C_2 e^{-t/4} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t + \varphi_2\right)$$

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{9+7} = 1.$$

$$A_2 = \ldots = 1.$$

$$\frac{3}{4}\cos\frac{\sqrt{7}t}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}\sin\frac{\sqrt{7}t}{4} = \sin\varphi_1\cos\frac{\sqrt{7}t}{4} + \cos\varphi_1\sin\frac{\sqrt{7}t}{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi_1 &= \frac{3}{4}\\ \cos\varphi_1 &= \frac{\sqrt{7}}{4}\end{aligned}\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

и (аналогичный счёт)

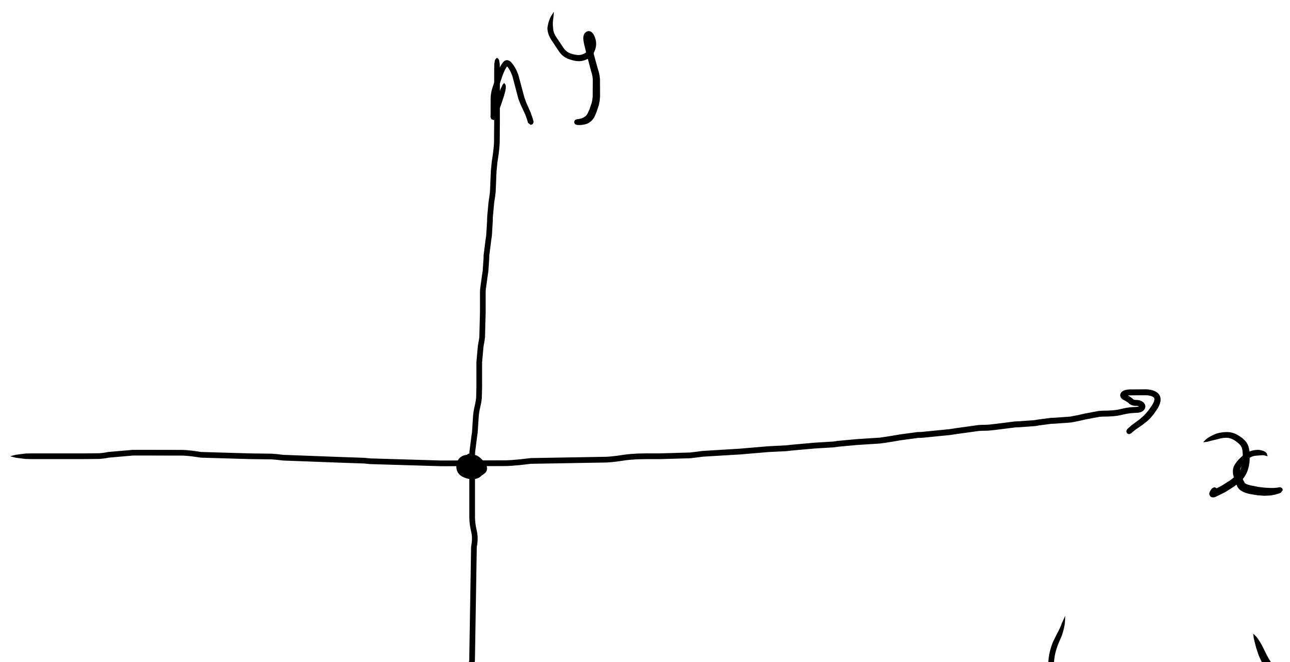
$$\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$y(t) = C_1 e^{-t/4} \sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{4} + \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right) +$$

$$+ C_2 e^{-t/4} \sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{4} + \pi - \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right).$$

•). Фазовый портрет этой системы.

$$\bar{x}(t) = (x(t), y(t))$$



$t \to +\infty$

$y(t) \to 0$

$x(t) \to 0$

т.е. $(0,0)$ (стац. решение) асимптот. устойчиво.

устойчивый фокус

а) Ось Ox : $y = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x - y = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y = x.$$

$$\dot{x} = x\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ось Oy: $x = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}x - y = -y \\ \dot{y} = x - y = -y \end{cases} \Rightarrow \dot{\bar{x}} = y \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Вертик. напр: $\dot{x} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$.

$\dot{x} = \frac{1}{2}x - y$

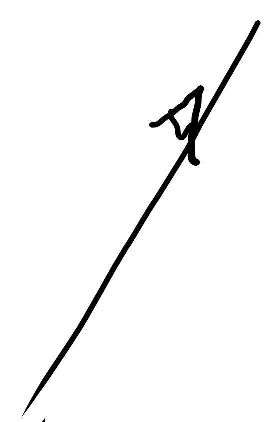
Гориз. напр: $\dot{y} = 0 \Rightarrow y = x$

$\dot{y} = x - y$

Почему (0,0) — асимпт. устойчиво?

Из-за $e^{-t/4}$, т.е. потому, что

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 = -1/4 < 0$



2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Гарм. осциллятор.

$$\ddot{x}_1 = -\dot{x}_2 = -x_1$$

$$\underline{\ddot{x}_1 + x_1 = 0.}$$

). $$\det \begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

$\lambda_1 = 0.$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0.$$

$$-i\alpha_1 - \alpha_2 = 0.$$

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = i.$$

Uomo $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \omega t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega t \right) +$$

$$+ C_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \omega t \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -C_1 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t \\ -C_1 \sin \omega t - C_2 \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

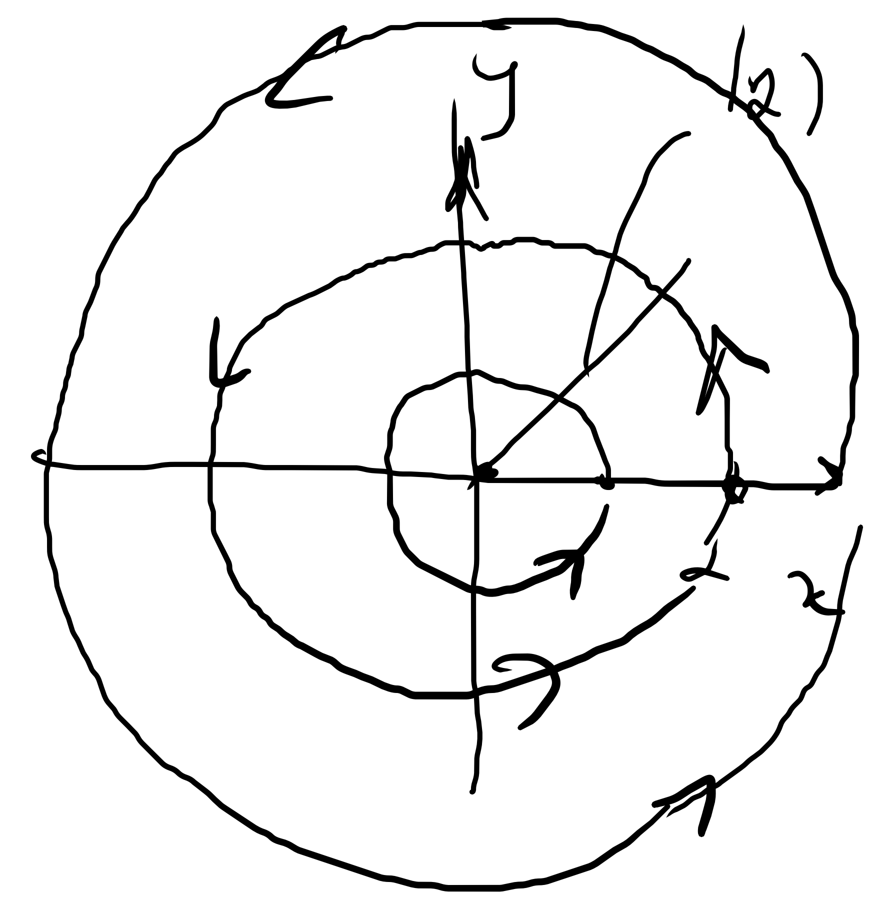
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix} = \bar{x}(0) = \begin{pmatrix}c_1\\ -c_2\end{pmatrix} \Rightarrow \quad c_2 = 0, \quad c_1 = \alpha.$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix}\alpha\cos\omega t\\ \alpha\sin\omega t\end{pmatrix}$$

Итого: $x_1(t) = \alpha\cos\omega t$

$x_2(t) = \alpha\sin\omega t$

$x_1^2 + y_1^2 = |\alpha|^2$



центр.