Разбор К/Р №1.

1)

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ x(0) = 1/2 \end{cases}$$

Решение. 1) $\dot{x} = f(t,x)$ $\qquad f(t,x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ автон. ДУ 1 порядка.

$$D_f = \{ (t,x) : -1 \le x \le 1, \quad x \neq 0 \}$$

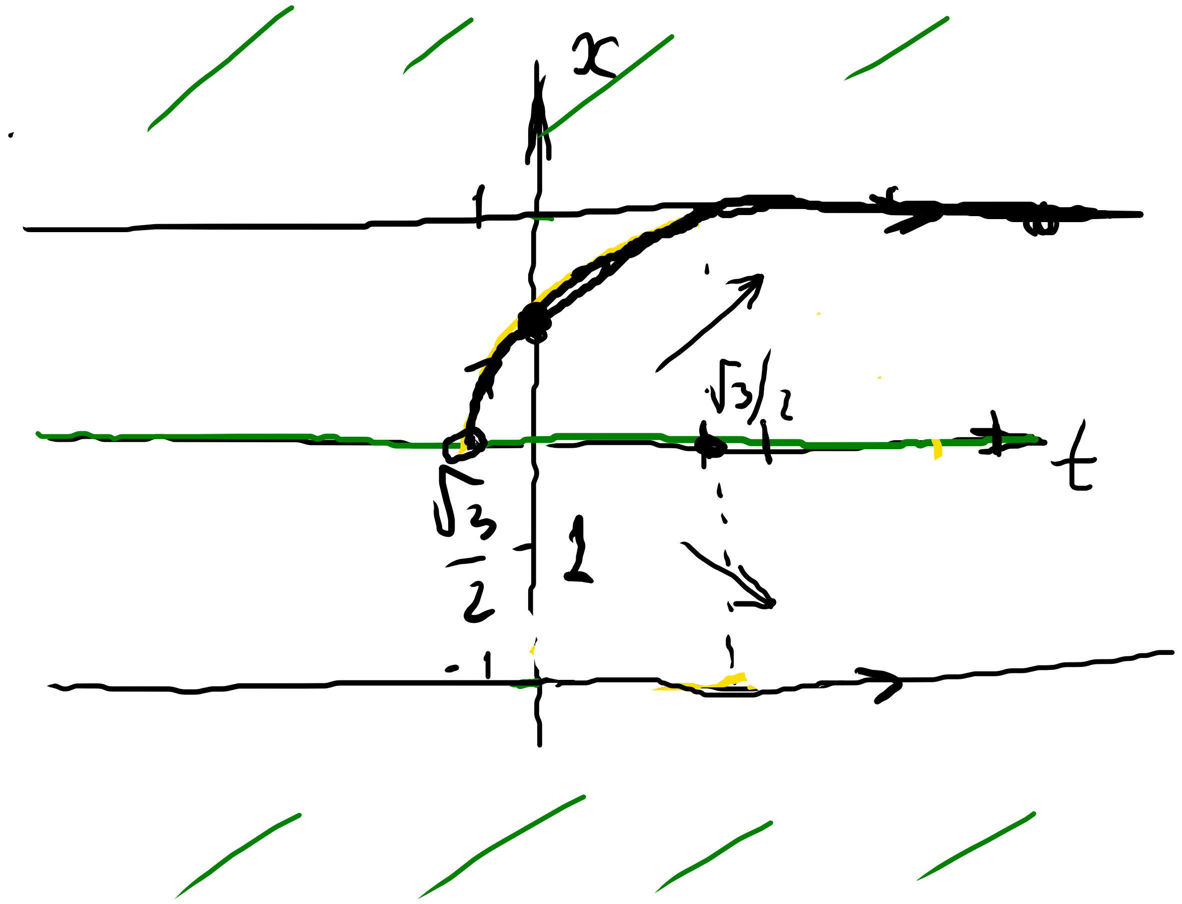
это мн-во НЕ открытое

2). Стац. решения. $x = 1 \quad x = -1$.

3). $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ $\exists$, непр. по t, x,

на $\tilde{D} := \{(t, x):$

$x \in (-1, 0) \cup$
$(0, 1)\}$



Траект. $\exists$ (локально) и единственна.

4). Монот.: Траект (интересующая нас) монот. возрастает.

5). $\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = dt$

$-\sqrt{1-x^2} = t + C$

$-\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = C$

$C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Итак: $-\sqrt{1-x^2} = t - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - t} \qquad (1)$$

а) Если прям. опред-ся ур-нием (1), то $\frac{\sqrt{3}}{2} - t \geqslant 0$, т.е.

$$t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Причем если $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

б) $(1) \Rightarrow 1 - x^2 = \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$.

окр. с центром $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ и $R = 1$.

·) Макс. интервал $\exists$ траектории: $\cancel{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]}$

[illegible] [illegible].

$$x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

$$\dot{x}_-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \lim_{t \to \frac{\sqrt{3}}{2}^-} \dot{x}(t) = \lim_{t \to \frac{\sqrt{3}}{2}^-} \frac{\overbrace{\sqrt{1 - x^2(t)}}^{\to 0}}{\underbrace{x(t)}_{\to 1}} = 0.$$

(2)

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(t - \sqrt{3}/2\right)^2}, & t \le \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1, & t > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$x \in C^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, +\infty\right)$

решение нач. задачи Коши

$$\dot{x}_+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

Прав. ответ. макс. интервал существования $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1, +\infty\right)$,

а решение огр. ф-лой (2)

о). $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 1.$ $\lim\limits_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = 0.$

$\lim\limits_{t\to\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^+} x(t) = 0$ $\lim\limits_{t\to\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^+} x(t) = +\infty$

(2) $\begin{cases} y' + xy = e^x \\ y(-1) = 1. \end{cases}$

$\cdot)$ Реш. $\exists!$, опред на $(-\infty, +\infty)$

$\cdot)$ $y = uv$ $\quad y' = u'v + v'u$

$$u'v + v'u + xuv = e^x$$

$$u\underbrace{(v' + xv)}_{=0} + u'v = e^x$$

$v' + xv = 0. \Rightarrow \quad v' = -xv \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -x\,dx.$

$$\ln v = -\frac{x^2}{2}$$

$$V = e^{-x^2/2}$$ (!)

$$u' v = e^{x}$$

$$u' e^{-x^2/2} = e^{x}$$

$$u' = e^{x + x^2/2}$$

$$u = \int_{-1}^{x} e^{s + s^2/2} \, ds + C$$

$$y = uv = e^{-x^2/2} \int_{-1}^{x} e^{s + s^2/2} \, ds + C e^{-x^2/2} =$$

$$= e^{-x^2/2} \int_{-1}^{x} e^{\frac{1}{2}(s^2 + 2s + 1) - \frac{1}{2}} \, ds + C e^{-x^2/2} =$$

$$= e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{e}} \int_{-1}^{x} e^{\frac{1}{2}(s+1)^2} ds + C e^{-x^2/2}$$

$$1 = y(-1) = C e^{-1/2} \Rightarrow C = e^{1/2}$$

$$y(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{e}} \int_{-1}^{x} e^{\frac{1}{2}(s+1)^2} ds + \sqrt{e}\, e^{-x^2/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} e^{-x^2/2} \int_{0}^{x+1} e^{t^2/2} dt + \sqrt{e}\, e^{-x^2/2}.$$

для любопытных: этот инт. выражается через erfi

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}} \int_0^{x+1} e^{t^2/2} \, dt + \underbrace{e^{-x^2/2 + 1/2}}_{\downarrow \, 0} \right) =$$

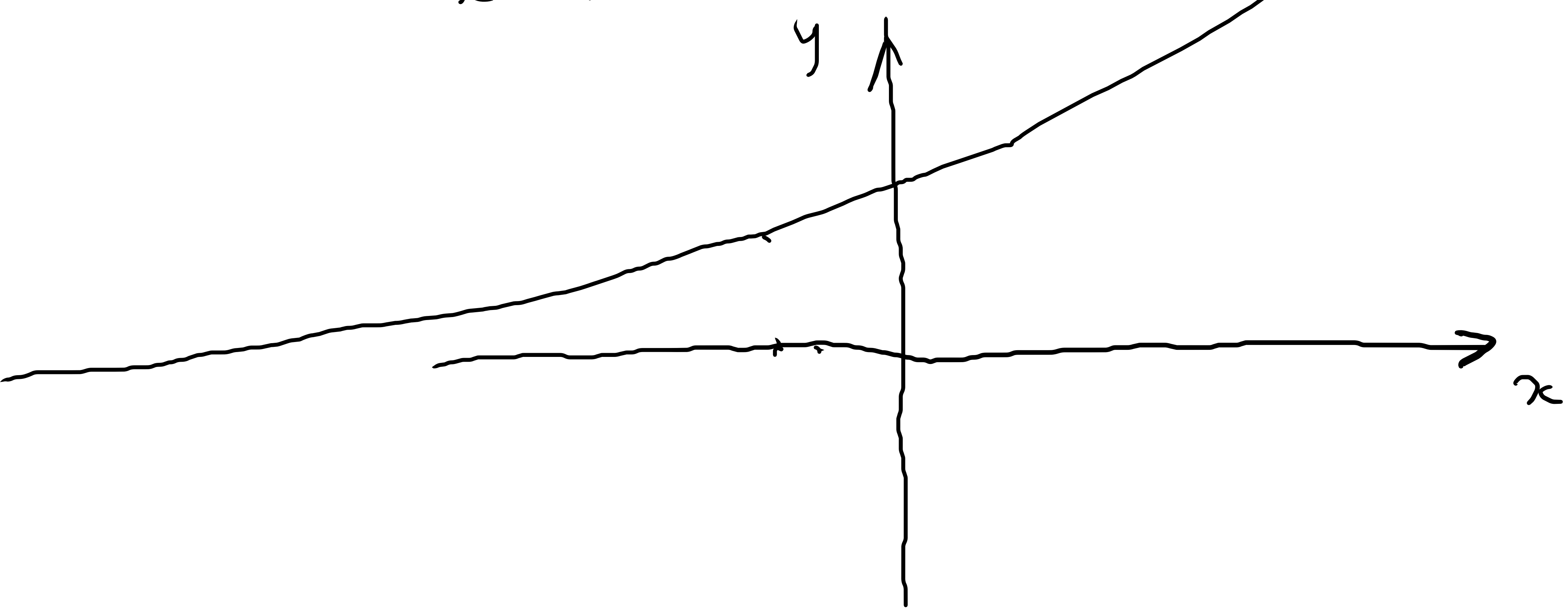
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}}_{\downarrow \, 0} \underbrace{\int_0^{x+1} e^{t^2/2} \, dt}_{\downarrow \, \pm\infty} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\int_0^{x+1} e^{t^2/2} \, dt}{e^{x^2/2 + \frac{1}{2}}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{(x+1)^2/2}}{e^{x^2/2 + 1/2} \, x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}} \, \frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{2} 2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x / x = 0.$$



$y \uparrow.$

(3) $\begin{cases} (y-x)\,y' = y & (3) \\ y(0) = 1 & (3') \end{cases}$ $\qquad y' = \dfrac{y}{y-x} \quad (4)$

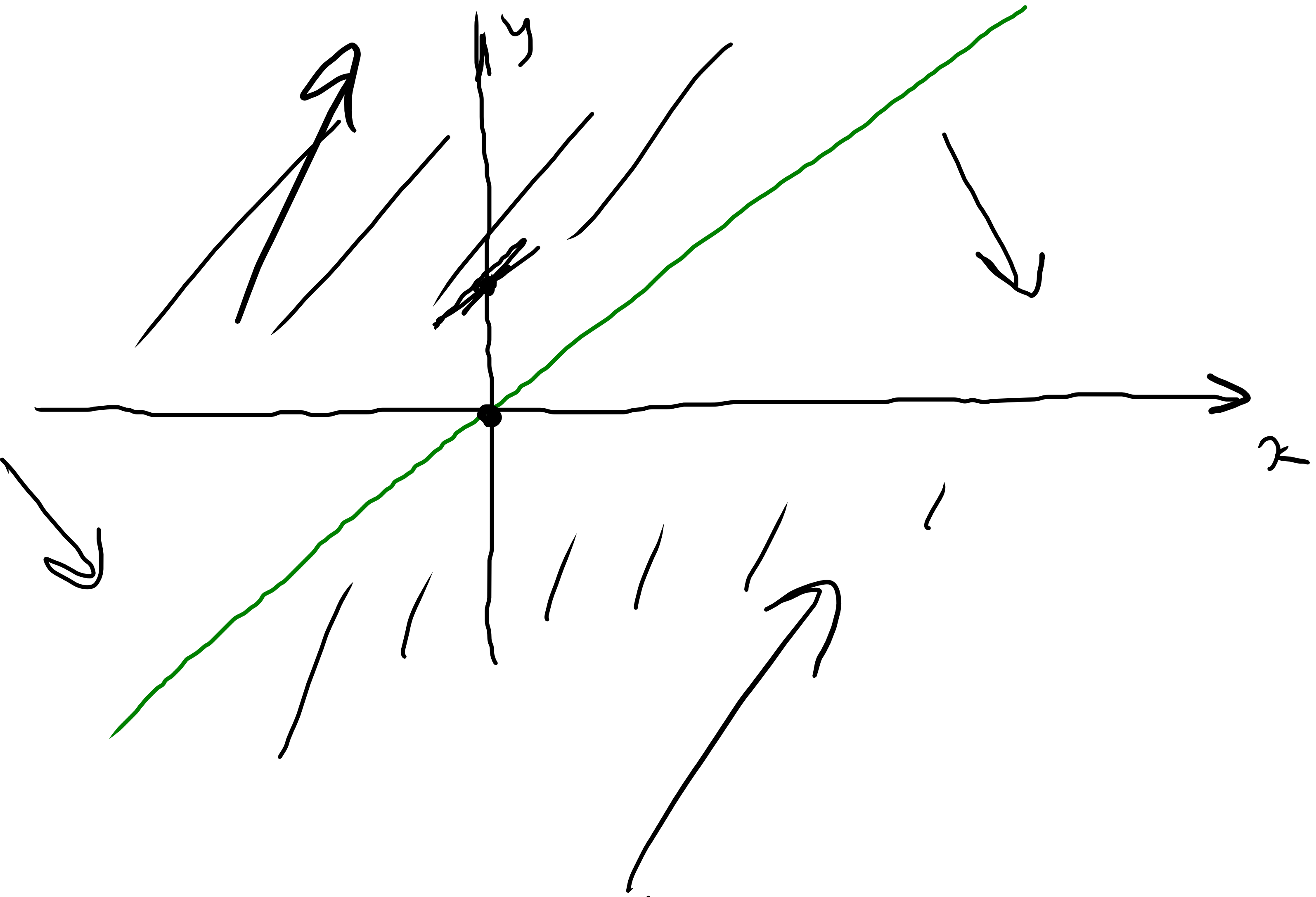
$$(3) \not\Leftrightarrow (4)$$

–) $y - x = 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} y = 0 \Rightarrow x = 0.$

$(x, y) = (0, 0)$ разбирать придётся отдельно (если понадобится)

∘) $f(x, y) = \dfrac{y}{y-x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = y\}$

Реш. задачи (4), (3') ∃ лок., единств.



$$y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y - x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

а) 2 вар-т: либо увидеть, что (4) - однор. ур-е.

$$y' = \frac{y/x}{y/x - 1}$$

$u(x) = y(x)/x$.

$y = xu \Rightarrow y' = xu' + u$.

$$xu' + u = \frac{u}{u-1}$$

$$xu' = \frac{u}{u-1} - u = \frac{-u^2+2u}{u-1}$$

$$u' = \frac{1}{x}\,\frac{-u^2+2u}{u-1} \iff \frac{du\,(u-1)}{(-u^2+2u)} = \frac{dx}{x} \iff \dots$$

2ри вариант. $\omega = (y-x)\,dy - y\,dx = 0.$

$$\exists f : \omega = df. \qquad (d\omega = 0.).$$

$$\begin{cases} f_y = y - x \\ f_x = -y. \end{cases}$$

$f_y = y - x \Rightarrow \quad f(x,y) = \underline{\frac{y^2}{2} - xy} + \underline{\varphi(x)}$

$-y = f_x = -y + \varphi'(x) \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \quad \varphi(x) = C$

Итого: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Если } y = y(x) \text{ – решение, то} \\ f(x, y(x)) = C \quad , \text{ где } \quad f(x,y) = \frac{y^2}{2} - xy \end{array} \right.$

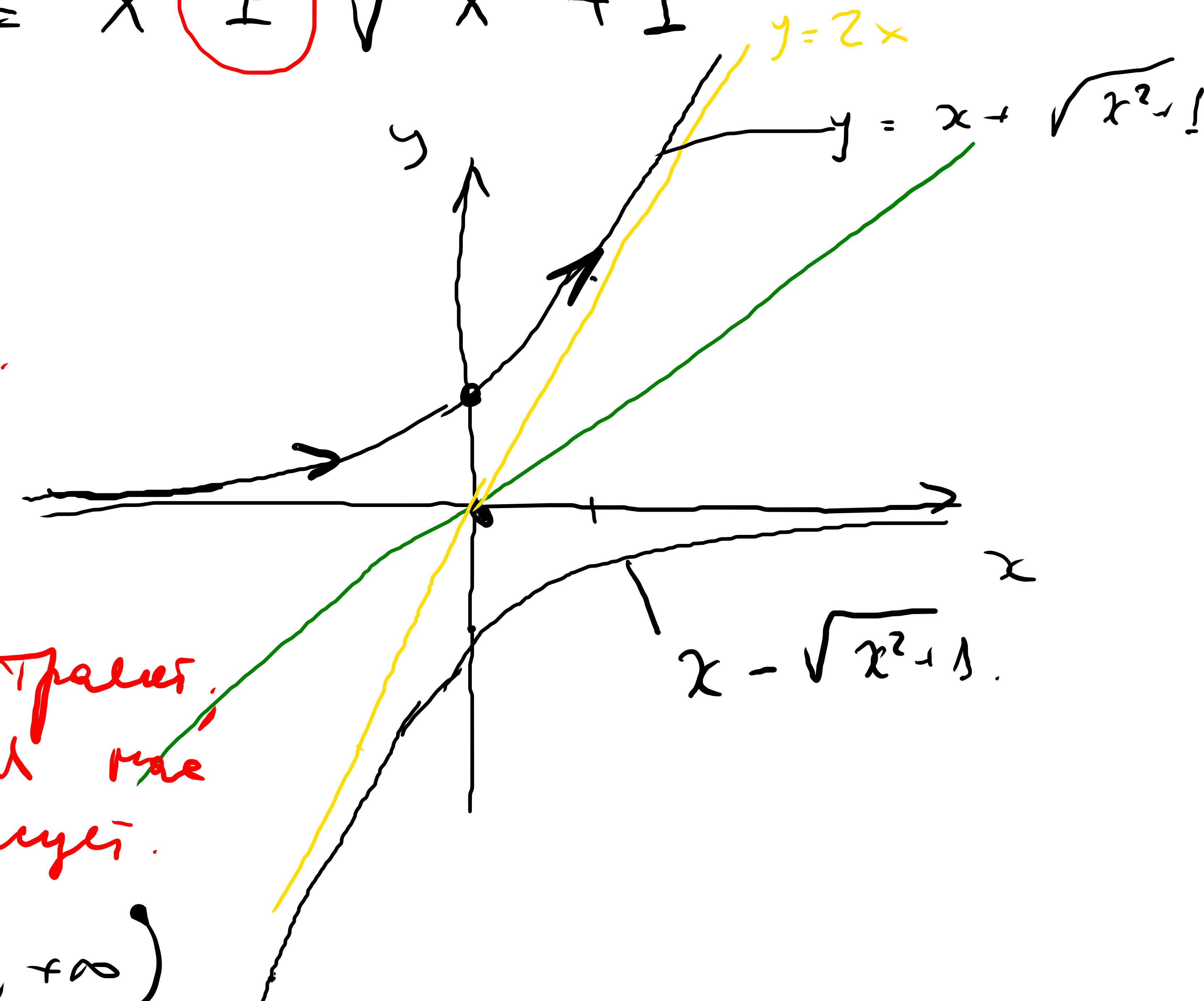
$C = f(0,1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad f(x, y(x)) = \frac{1}{2}$

т. е. $\frac{y^2}{2} - xy = \frac{1}{2} \iff$

$$y^2 - 2xy - 1 = 0 \iff y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

$y(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ — ответ.

$y(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ не та траект. которая нас интересует.



Макс. интервал существ. $(-\infty, +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad y(x) = 2x + o(x), \; x \to +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0,$$

$y \uparrow$ на $(-\infty, +\infty)$