Свободная релятивистская частица
(в одном пространственном измерении)

Рассмотрим странного вида действие:

$$\boxed{S[x(t)] = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}\, dt} \qquad (6)$$

Здесь α и C – два параметра. C – имеет размерность скорости ($\dot{x}/c$ – безразмерно). Назовём предварительно c "скоростью света".

Лагранжиан этой системы $L = -\alpha\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}$ приближается к привычному нам квадратичному по скоростям лагранжиану в пределе $|\dot{x}/c| \ll 1$,

причём

$$L \overset{|\dot{x}/c|\ll 1}{=} -\alpha\left(1-\frac{\dot{x}^2}{2c^2}\right) + o\left(\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)$$

Если выбрать $\boxed{\alpha = mc^2}$, то

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \underset{\text{несущественная const.}}{mc^2} + o(\dot{x}^2/c^2)$$ – сводится

к лагранжиану обычной (нерелятивистской) частицы.

Зафиксируем $\boxed{\alpha = mc^2}$, где m будем предварительно называть "массой частицы".

Поскольку $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$, в системе, очевидно, есть два закона сохранения:

1) Закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \boxed{\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}} = p = \text{const}} \qquad (7)$$

2) Закон сохранения энергии

$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \boxed{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}} = E = \text{const}} \qquad (8)$$

Чтобы получить траектории движения системы, проинтегрируем ещё раз закон сохранения импульса

$$p = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}} = \text{const}$$

$\Downarrow$ выражаем $\dot{x}$

$$\boxed{\dot{x}^2 = \frac{p^2}{p^2+m^2c^2}\cdot c^2} \qquad (7a)$$

Очевидно $\boxed{\dot{x} = \text{const}}$, но с одной особенностью $\boxed{\dot{x}/c \leq 1}$, что впрочем ожидалось, если считать действие (6) вещественным.

Мы получили банальную прямолинейно и равномерно движущуюся частицу. Что же в ней необычного? <u>Необычны симметрии</u>

Мы имеем обычные симметрии трансляций в пространстве и во времени

$$\begin{cases} \tilde{x} = x+\varepsilon \\ \tilde{t} = t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{t} = t+\varepsilon, \end{cases}$$

приводящим к законам сохранения импульса и энергии.

Если бы степеней свободы было больше, например при $L = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}$,

мы бы имели ещё обычные симметрии при вращениях пространственной системы координат, приводящие к закону сохранения момента импульса.

А вот обычной симметрии перехода в движущуюся систему координат больше нет: проверьте, что преобразования

$$(9)\quad \boxed{\begin{cases} \tilde{x} = x + vt \\ \tilde{t} = t \end{cases}}$$ — v - непрерывной параметр семейства преобразований

не может быть симметрией действия (6)

Взамен появляется другая симметрия

$$(10)\quad \boxed{\begin{cases} \tilde{x} = \operatorname{ch}\theta\, x + \operatorname{sh}\theta\, ct \\ \tilde{t} = \frac{1}{c}\operatorname{sh}\theta\, x + \operatorname{ch}\theta \cdot t \end{cases}}$$ θ - непрерывной параметр

Убедиться в этом проще всего, если перейти к новой формальной переменной интегрирования τ в действии (6):

$$x = x(\tau), \quad t = t(\tau), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx/d\tau}{dt/d\tau}$$

$$\boxed{S[x(\tau), t(\tau)] = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2}\, d\tau} \quad (6a)$$

При этом под знаком корня возникает квадратичная форма переменных $\frac{dt}{d\tau}$ и $\frac{dx}{d\tau}$ с диагональной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/c^2 \end{pmatrix}$. Такие формы инвариантны при гиперболических поворотах вида

$$\boxed{\begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x}/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x/c \end{pmatrix}} \qquad (10a)$$

что эквивалентно формулам (10).

Rem: Заметим, что при параметризации

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \operatorname{sh}\theta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

или, проще $\boxed{\operatorname{th}\theta = \frac{v}{c}}$,

преобразования (10) в пределе $|v/c| \ll 1$ переходят в привычные нам правила перехода в движущуюся систему координат (9).

Нётеровский ток, отвечающий преобразованиям (10) не даёт новых независимых законов сохранения (проверьте!)

Однако, если мы всерьёз принимаем действие (6), то ему соответствуют другие правила перехода между инерциальными системами отсчёта. Переходу в движущуюся ИСО соответствуют не правила (9), а правила (10), и они затрагивают время: время в движущихся друг относительно друга ИСО течёт по-разному! Группа преобразований ИСО – это уже не группа Галилея, а группа Пуанкаре (преобразования (10) называются преобразованиями Лоренца).

Эта замена группы фундаментальных симметрий сказывается и на физике даже для прямолинейной свободной частицы.

Обратим внимание на связь сохраняющихся энергии и импульса свободной частицы.

У нерелятивистской частицы это $E = \frac{p^2}{2m}$

Если всерьёз принимать модель релятивистской частицы, то для нее из формул (7а) и (8) стр 9. следует связь:

$$\boxed{E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}}$$

Отсюда при $p = 0$ $E = mc^2$ – у всякой частицы есть неотъемлемая энергия покоя, пропорциональная её массе. Именно эта энергия высвобождается при аннигиляции частиц в квантовом мире.

А при $m \to 0$ $E \to pc$. Именно так линейно связаны энергия и импульс безмассовых частиц – фотонов