Семинар 9.

Везде в задачах основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто характеристики 0, $(x_0 : x_1 : x_2)$ - однородные координаты в $\mathbb{P}^2$, $F(x_0, x_1, x_2)$ - форма степени d, $X = V(F)$ - кривая в $\mathbb{P}^2$. $(d-2)$-ая поляра $Q_b(X) := P_{b^{d-2}}(X)$ произвольной точки $b \in \mathbb{P}^2$ относительно кривой X является коникой. Она называется *полярной коникой точки b относительно кривой X*. Из этого определения находим уравнение полярной коники $Q_b(X)$:

$$Q_b(X) = \{\sum_{i,j=0}^{2} x_i x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(b) = 0\}. \tag{1}$$

Дадим еще одно определение. Кривая $He(X)$ с уравнением

$$He(X) = \{x \in \mathbb{P}^2 \mid \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| = 0\}. \tag{2}$$

называется *гессианом* (или *кривой Гессе*) кривой X. Нетрудно видеть, что гессиан $He(X)$ имеет степень $3(d-2)$.

Задача 1. (Это задача 2.2 из семинара 8.) Пусть b - обыкновенная двойная точка кривой X, прямые l_1 и l_2 - касательные к ветвям кривой X в точке b, и пусть точка a не лежит ни на X, ни на прямых l_1 и l_2. Обозначим $m_1 = \langle a, b \rangle$. Согласно задаче 2.1 из семинара 8 точка b - неособая точка на поляре $P_a(X)$, так что, $m_2 := \mathbb{T}_b P_a(X)$ - прямая. Докажите, что пара прямых l_1, l_2 гармонически делит пару прямых m_1, m_2, то есть l_1, l_2, m_1, m_2 - гармоническая четверка прямых.

Задача 2. Напомним, что неособая точка $b \in X$ называется *точкой перегиба*, если касательная прямая $\mathbb{T}_b X$ имеет пересекает кривую X в точке b с кратностью $\geqslant 3$.
1) Докажите, что неособая точка $b \in X$ является точкой перегиба тогда и только тогда, когда она лежит в пересечении кривой X с ее гессианом $He(X)$. (В одну сторону это утверждение уже было проверено на семинаре, поэтому его можно повторить в решении.)
2) Докажите, что всякая особая точка кривой X лежит в пересечении X с ее гессианом $He(X)$. Другими словами, с учетом утверждения 1) получаем равенство:

$$X \bigcap He(X) = \mathrm{Sing}(X) \bigcup \{\text{множество точек перегиба кривой } X\}.$$

Задача 3. Докажите, что если X - гладкая кубическая кривая и $a \in He(X)$, то из условия $b \in \mathrm{Sing}\, Q_a(X)$ следует, что $a \in \mathrm{Sing}\, Q_b(X)$.

Задача 4. Кривая $St(X) = \bigcup_{a \in He(X)} \mathrm{Sing}\, Q_a(X)$ называется *штейнерианом* (или *кривой Штейнера*) кривой X. Докажите, что если X - гладкая кубика, то ее гессиан и штейнериан совпадают: $He(X) = St(X)$.

Задача 5. 1) Придумайте такую вещественную кубику X и точку a вне ее, что через a проходят 6 различных касательных прямых к X.
2) Как мы знаем, для произвольной точки b, не лежащей на кубике X, все касательные прямые к X, проходящие через точку b, имеют точками касания точки пересечения X с полярой $P_b(X)$. Пусть для удобства точка $b \notin X$ взята так, что она не лежит на гессиане $He(X)$, так что коника $P_b(X) = Q_b(X)$ неособа. Докажите, что коника $Q_b(X)$ не касается X в точках ее пересечения с X. Выведите отсюда, что пересечение X с $Q_b(X)$ состоит из 6 различных точек, то есть через точку b проходят 6 различных касательных к кривой X.