Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

Функции на кривой можно понимать как сечения тривиального линейного расслоения над ней. Тривиальное линейное расслоение над кривой C — это прямое произведение $C \times \mathbb{C}$ этой кривой на комплексную прямую. Каждой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ сопоставляется мероморфное сечение этого расслоения $C \to C \times \mathbb{C}$, переводящее точку $x \in C$ в точку $(x, f(x)) \in C \times \mathbb{C}$. Прообразы бесконечности являются полюсами функции f в C. Если кривая C компактна, то все голоморфные функции на ней постоянны, а у всякой непостоянной мероморфной функции есть полюса.

Функции на кривой можно понимать как сечения тривиального линейного расслоения над ней. Тривиальное линейное расслоение над кривой C — это прямое произведение $C \times \mathbb{C}$ этой кривой на комплексную прямую. Каждой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ сопоставляется мероморфное сечение этого расслоения $C \to C \times \mathbb{C}$, переводящее точку $x \in C$ в точку $(x, f(x)) \in C \times \mathbb{C}$. Прообразы бесконечности являются полюсами функции f в C. Если кривая C компактна, то все голоморфные функции на ней постоянны, а у всякой непостоянной мероморфной функции есть полюса.
Помимо тривиального линейного расслоения над всякой кривой есть еще два естественных линейных расслоения: касательное TC и кокасательное $T^\vee C$. Эти два расслоения имеются не только над кривыми, но и над произвольными комплексными многообразиями. Однако над комплексным многообразием размерности $n > 1$ эти расслоения не являются линейными; их ранг (т.е., размерность слоя), равен n, тогда как ранг линейного расслоения, по определению, равен 1.

Definition

Векторным расслоением ранга k, $k \in \mathbb{N}$, над комплексным многообразием M размерности m называется пара, состоящая из комплексного многообразия E размерности $m+k$ и голоморфного отображения $p : E \to M$, такого, что у любой точки $x \in M$ существует открытая окрестность $U(x) \subset M$ и биголоморфизм $\varphi : U(x) \times \mathbb{C}^k \to p^{-1}(U(x))$ прямого произведения $U(x)$ и $\mathbb{C}^k$ на полный прообраз этой окрестности, причем

- $p \circ \varphi : (x, v) \mapsto x$ для любой точки $x \in M$;
- ограничение отображения φ на $y \times \mathbb{C}^k$ является линейным изоморфизмом на $p^{-1}(y)$ для любой точки $y \in U(x)$.

Прообраз $p^{-1}(x)$ точки $x \in M$ называется *слоем* векторного расслоения $p : E \to M$.
Мероморфным сечением голоморфного векторного расслоения $p : E \to M$ называется мероморфное отображение $\sigma : M \to E$, такое, что $p \circ \sigma : M \to M$ есть тождественное отображение.
Если ранг k векторного расслоения равен 1, то расслоение называется *линейным*.

Слоем T_x *касательного расслоения* TC к кривой C над точкой $x \in C$ является касательная прямая к C в точке x. Касательная прямая состоит из *касательных векторов*, которые можно определять по-разному. Например, как классы эквивалентности голоморфных отображений $(D, 0) \to (C, x)$, где D — единичный диск в $\mathbb{C}$, или как *дифференцирования*, т.е. линейные отображения из пространства ростков голоморфных функций в точке $x \in C$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющие правилу Лейбница $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$. При втором определении утверждение о том, что касательные вектора к кривой C в данной точке x образуют векторное пространство, становится очевидным. *Кокасательное расслоение* двойственно к касательному.

Лекция 11. Касательное и кокасательное расслоения над кривой

Слоем T_x *касательного расслоения* TC к кривой C над точкой $x \in C$ является касательная прямая к C в точке x. Касательная прямая состоит из *касательных векторов*, которые можно определять по-разному. Например, как классы эквивалентности голоморфных отображений $(D, 0) \to (C, x)$, где D — единичный диск в $\mathbb{C}$, или как *дифференцирования*, т.е. линейные отображения из пространства ростков голоморфных функций в точке $x \in C$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющие правилу Лейбница $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$. При втором определении утверждение о том, что касательные вектора к кривой C в данной точке x образуют векторное пространство, становится очевидным. *Кокасательное расслоение* двойственно к касательному. *Векторное поле* — это сечение касательного расслоения. *Дифференциальная* 1*-форма* — сечение кокасательного расслоения (*ковекторное поле*). В локальной координате z векторное поле записывается в виде $a(z)\partial/\partial z$; его нули и полюса — это нули и полюса локальных коэффициентов $a(z)$. Если векторное поле голоморфно, то голоморфна и функция $a(z)$; если поле мероморфно, то функция $a(z)$ мероморфна. Соответственно, 1-форма записывается в виде $b(z)dz$.

Лекция 11. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

На любой кривой C голоморфные векторные поля и голоморфные 1-формы образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$. В свою очередь, мероморфные векторные поля и мероморфные 1-формы образуют векторное пространство как над $\mathbb{C}$, так и над полем мероморфных функций на C. Отношение любых двух ненулевых векторных полей является мероморфной функцией, поэтому последнее векторное пространство одномерно. То же самое справедливо и для 1-форм (и сечений любых линейных расслоений).

На любой кривой C голоморфные векторные поля и голоморфные 1-формы образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$. В свою очередь, мероморфные векторные поля и мероморфные 1-формы образуют векторное пространство как над $\mathbb{C}$, так и над полем мероморфных функций на C. Отношение любых двух ненулевых векторных полей является мероморфной функцией, поэтому последнее векторное пространство одномерно. То же самое справедливо и для 1-форм (и сечений любых линейных расслоений). Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2 \partial/\partial w$. Это означает, в частности, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Лекция 11. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

1-форма dz имеет в бесконечности полюс второго порядка: $dz{=}d\frac{1}{w} = -\frac{dw}{w^2}$.

Лекция 11. Векторные поля и 1-формы на проективной прямой

Векторное поле $\partial/\partial z$ является голоморфным векторным полем на проективной прямой. Его голоморфность очевидна для всех конечных значений z. Чтобы понять, как оно ведет себя в бесконечности, посмотрим, как это векторное поле действует на локальную координату $w = 1/z$ в окрестности бесконечности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} w = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Тем самым, в координате w наше векторное поле имеет вид $-w^2\partial/\partial w$. Это означает, что оно голоморфно (у него нет полюсов) и имеет нуль порядка 2 в бесконечности.

Corollary

Всякое голоморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $P_2(z)\partial/\partial z$, где $P_2(z)$ — многочлен степени не выше 2.

1-форма dz имеет в бесконечности полюс второго порядка: $dz = d\frac{1}{w} = -\frac{dw}{w^2}$.

Corollary

На проективной прямой нет ненулевых голоморфных 1-форм.

Лекция 11. Дифференциал функции

Одним из основных источников мероморфных 1-форм на комплексных кривых являются дифференциалы функций. Всякой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ на кривой C соответствует 1-форма df, ее дифференциал, на C. По определению, 1-форма df действует на касательный вектор $v \in T_x C$ по правилу $df : v \mapsto v(f)$. В локальной координате z дифференциал мероморфной функции f записывается в виде $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Одним из основных источников мероморфных 1-форм на комплексных кривых являются дифференциалы функций. Всякой мероморфной функции $f : C \to \mathbb{C}P^1$ на кривой C соответствует 1-форма df, ее дифференциал, на C. По определению, 1-форма df действует на касательный вектор $v \in T_xC$ по правилу $df : v \mapsto v(f)$. В локальной координате z дифференциал мероморфной функции f записывается в виде $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$.

Упражнение. 1-форма dz на проективной прямой является дифференциалом мероморфной функции z. Дифференциалом какой мероморфной функции является 1-форма $\frac{dz}{z}$?

Всякое ненулевое мероморфное векторное поле на проективной прямой имеет вид $\frac{P(z)}{Q(z)}\frac{\partial}{\partial z}$, где $P(z), Q(z)$ — многочлены, не имеющие общих корней. Всякая ненулевая мероморфная 1-форма на проективной прямой имеет вид $\frac{P(z)}{Q(z)}dz$, где $P(z), Q(z)$ — многочлены, не имеющие общих корней.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в $\mathbb{C}$. В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой $\mathbb{C}/L$. Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на $\mathbb{C}/L$, то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на $\mathbb{C}/L$, т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на $\mathbb{C}/L$ одномерно.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в $\mathbb{C}$. В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой $\mathbb{C}/L$. Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на $\mathbb{C}/L$, то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на $\mathbb{C}/L$, т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на $\mathbb{C}/L$ одномерно.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на эллиптической кривой $C = \mathbb{C}/L$ задает *тривиализацию* касательного расслоения TC к C. Таким образом, в случае эллиптической кривой касательное расслоение тривиально, $TC \cong C \times \mathbb{C}$.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ инвариантно относительно сдвигов на любой вектор в $\mathbb{C}$. В частности, оно инвариантно относительно сдвигов на элементы любой решетки $L \subset \mathbb{C}$, и определяет поэтому векторное поле на факторкривой $\mathbb{C}/L$. Это векторное поле голоморфно (у него нет полюсов) и не имеет нулей. Если V — другое голоморфное векторное поле на $\mathbb{C}/L$, то, разделив его на $\partial/\partial z$, получаем голоморфную функцию на $\mathbb{C}/L$, т.е. константу. Поэтому пространство голоморфных векторных полей на $\mathbb{C}/L$ одномерно.

Векторное поле $\partial/\partial z$ на эллиптической кривой $C = \mathbb{C}/L$ задает *тривиализацию* касательного расслоения TC к C. Таким образом, в случае эллиптической кривой касательное расслоение тривиально, $TC \cong C \times \mathbb{C}$.

Аналогичные утверждения справедливы и для 1-форм. Кокасательное расслоение $T^\vee C$ к эллиптической кривой тривиально и порождается голоморфной 1-формой dz, не имеющей нулей.

Лекция 11. Векторные поля и 1-формы

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Лекция 11. Векторные поля и 1-формы

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C. Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \to \mathbb{C}P^1$.

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C. Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \to \mathbb{C}P^1$.

Упражнение. Почему мероморфное векторное поле на плоскости не задает векторного поля на погруженной в плоскость кривой?

Лекция 11. Векторные поля и 1-формы

Сумма порядков нулей и полюсов мероморфного векторного поля на комплексной кривой равна ее эйлеровой характеристике. Поэтому на кривых рода $g > 1$ (эйлерова характеристика которых отрицательна) нет ненулевых голоморфных векторных полей. Напротив, для существования голоморфных 1-форм отрицательность эйлеровой характеристики не является препятствием.

Задавать векторные поля и 1-формы на кривых рода $g > 1$ сложнее, чем на кривых рода 0 и 1, — из-за отсутствия глобальной координаты и трудностей определения мероморфных функций на произвольной кривой. В то же время, 1-форму можно задать на кривой, отображенной в проективное пространство, подняв на нее мероморфную 1-форму на объемлющем пространстве. Например, если кривая C погружена в плоскость, то всякая 1-форма на плоскости задает 1-форму на C. Дифференциал функции также является поднятием 1-формы dz на $\mathbb{C}P^1$ при отображении $f : C \to \mathbb{C}P^1$.

Упражнение. Почему мероморфное векторное поле на плоскости не задает векторного поля на погруженной в плоскость кривой?

Более общим образом, голоморфное отображение $F : C \to M$ кривой C в комплексное многообразие M позволяет поднять на C любую 1-форму ω на M, положив $F^*\omega(v) = \omega(dF(v))$. Поэтому 1-формы — более подходящий объект для изучения и более подходящий инструмент исследования кривых, чем векторные поля.

Ограничивая 1-форму dx на произвольную плоскую алгебраическую кривую, мы получаем 1-форму на этой кривой. Если кривая C задана уравнением $(x-1)^2+y^2=1$, то ее можно параметризовать рациональной кривой, положив

$$x=\frac{2}{1+t^2}; \qquad y=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда $dx=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$, и нулями этой 1-формы являются те точки кривой, в которых $t=0$ и $t=\infty$, т.е. точки $(2,0)$ и $(0,0)$. Кроме того, у нее два полюса, оба порядка 2, в точках, отвечающих значениям параметра $t=\pm i$, т.е. в точках $(1:\pm i:0)$ на бесконечности нашей кривой.

Ограничивая 1-форму dx на произвольную плоскую алгебраическую кривую, мы получаем 1-форму на этой кривой. Если кривая C задана уравнением $(x-1)^2+y^2=1$, то ее можно параметризовать рациональной кривой, положив

$$x=\frac{2}{1+t^2}; \qquad y=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда $dx=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$, и нулями этой 1-формы являются те точки кривой, в которых $t=0$ и $t=\infty$, т.е. точки $(2,0)$ и $(0,0)$. Кроме того, у нее два полюса, оба порядка 2, в точках, отвечающих значениям параметра $t=\pm i$, т.е. в точках $(1:\pm i:0)$ на бесконечности нашей кривой.

Другой — и более универсальный, пригодный не только для рациональных кривых, — способ находить нули 1-формы, состоит в том, чтобы сравнить дифференциал на плоскости с дифференциалом df функции f, задающей кривую. В нулях ограничения дифференциала на кривую он пропорционален df; действительно, значение df на любом касательном векторе к кривой $f=0$ равно 0. Полюсами ограничения дифференциала на кривую могут оказаться точки пересечения кривой его полюсов с самой кривой; в частности, это могут быть точки кривой на бесконечности, которые нужно проверять.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-*форм на ней не меньше ее рода* $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Доказательство. Выберем на проективной плоскости координаты $(x:y:z)$ таким образом, чтобы прямая $z = 0$ пересекала кривую C в d точках (т.е., трансверсально). Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $f(x,y) = 0$.

Lemma

Дифференциальная 1-форма

$$\omega_C = \frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $F(x, y, 1) = f(x, y) = 0$.

Lemma

Дифференциальная 1*-форма*

$$\omega_C = \frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1*-формой на* C.

Пусть кривая C задается в аффинных координатах уравнением $F(x,y,1)=f(x,y)=0$.

Lemma

Дифференциальная 1*-форма*

$$\omega_C=\frac{dx\wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1*-формой на* C*.*

Доказательство. В аффинной карте $z=1$ 1-форма ω_C не имеет особенностей, поскольку df не обращается в нуль на C. Достаточно проверить, что она не имеет полюсов на бесконечности. Перейдем от карты $z=1$ к карте $x=1$: $x=\frac{1}{v}, y=\frac{u}{v}$. Тогда

$$\omega_C=\frac{dx}{\partial f/\partial y}=-\frac{dv/v^2}{\partial f/\partial y\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v},\right)}=-\frac{v^{d-3}dv}{v^{d-1}\partial f/\partial y\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)}.$$

В знаменателе последнего выражения стоит производная по u функции $F(1,u,v)$.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1*-форм на ней не меньше ее рода* $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ней не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2$.

Lemma

Для всякого многочлена $p(x, y)$ степени, не превосходящей $d-3$, дифференциальная 1-форма

$$p(x, y)\omega_C$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на C, равной 0 в том и только в том случае, когда $p \equiv 0$.

Доказательство. Достаточно проверить, что в точках кривой C на бесконечности порядок нуля 1-формы ω_C равен $d-3$.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских нодальных кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская нодальная кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ее нормализации не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2 - \delta$, где δ — число точек простого самопересечения кривой C.

Лекция 11. Размерность пространства голоморфных 1-форм на плоских нодальных кривых

Theorem

Пусть C — гладкая плоская нодальная кривая степени $d \geq 3$. Тогда размерность пространства голоморфных 1-форм на ее нормализации не меньше ее рода $g(C) = (d-1)(d-2)/2 - \delta$, где δ — число точек простого самопересечения кривой C.

Lemma

Для всякого многочлена $p(x, y)$ степени, не превосходящей $d-3$, обращающегося в нуль в двойных точках кривой C, дифференциальная 1-форма

$$p(x, y)\frac{dx \wedge dy}{df}$$

является корректно определенной голоморфной 1-формой на нормализации кривой C, равной 0 в том и только в том случае, когда $p \equiv 0$.

- Докажите, что ограничение 1-формы dF на плоскую кривую, где F — мероморфная функция на плоскости, является дифференциалом ограничения функции F на эту кривую.
- Рассмотрим результат ограничения 1-формы (a) xdx; (b) ydx на плоскую кривую $x^n + y^n = 1$. Найдите нули этой 1-формы и укажите их порядки. Найдите полюса этой 1-формы и укажите их порядки.

Семинар 11.

- Пусть f — проекция квадрики $x^2 + y^2 = 1$ на ось x. Верно ли, что любая мероморфная 1-форма на квадрике является поднятием некоторой 1-формы на прямой при отображении f?
- Пусть плоская кривая задана уравнением $y^4 = x^3 - 3x$. Найдите ее род. Найдите полюсы ограничения 1-формы dx/y на эту кривую и укажите их порядки. Постройте базис голоморфных 1-форм на этой кривой.
- Докажите, что всякая 1 форма вида

$$\frac{p(x)dx}{y}$$

где p — многочлен степени не выше $g-1$, является голоморфной 1-формой на гиперэллиптической кривой $y^2 = Q_{2g+1}(x)$, где Q_{2g+1} — многочлен степени $2g+1$ с попарно различными корнями.