$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{f}(k) = (\mathcal{F} f)(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} dx$$

Полезные наблюдения

- $\hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^n)$
- $\hat{f}(0) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$
- В принципе полезно $\mathcal{F}$ определить даже не на $L^1(\mathbb{R}^n)$,

и на мерах конечной полной вариации

$$\mu \rightsquigarrow \hat{\mu} = \mathcal{F}(\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x}\, d\mu(x)$$

В частности, если $\mu = f\,dx$ (и евклидическ... $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$), то

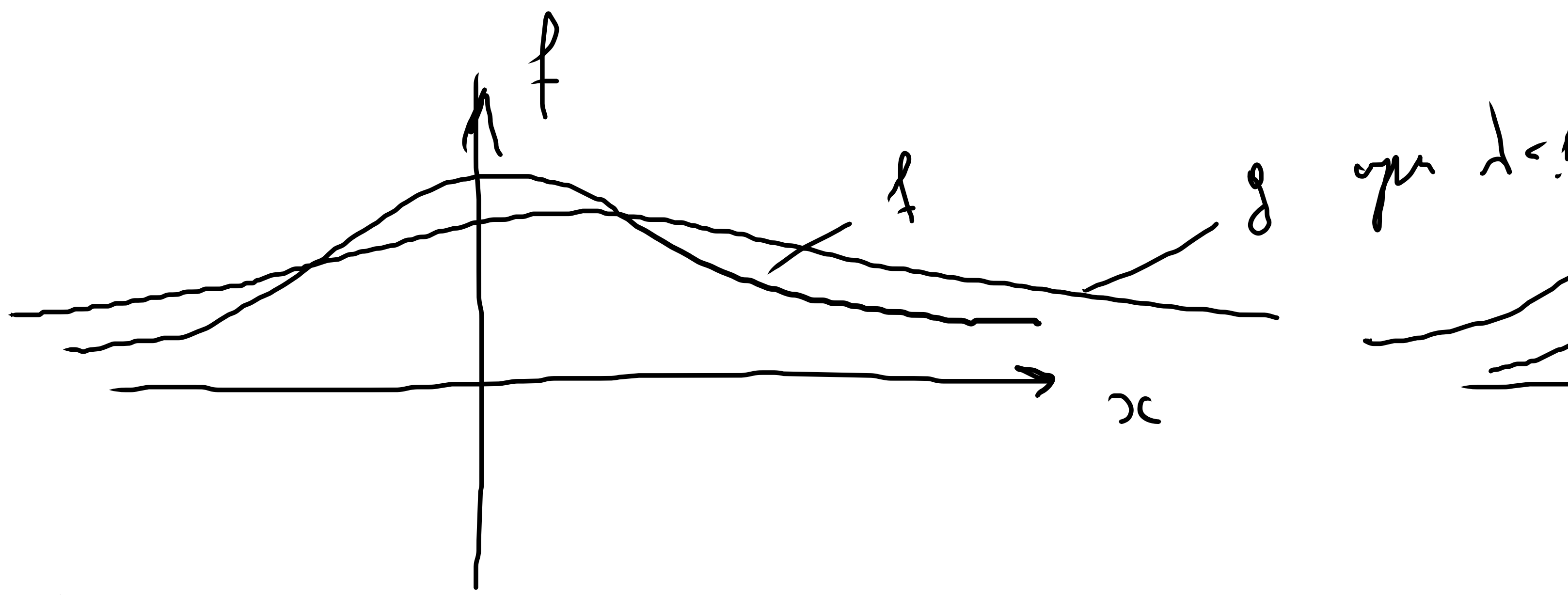
$$\underline{\hat{\mu} = \hat{f}}$$

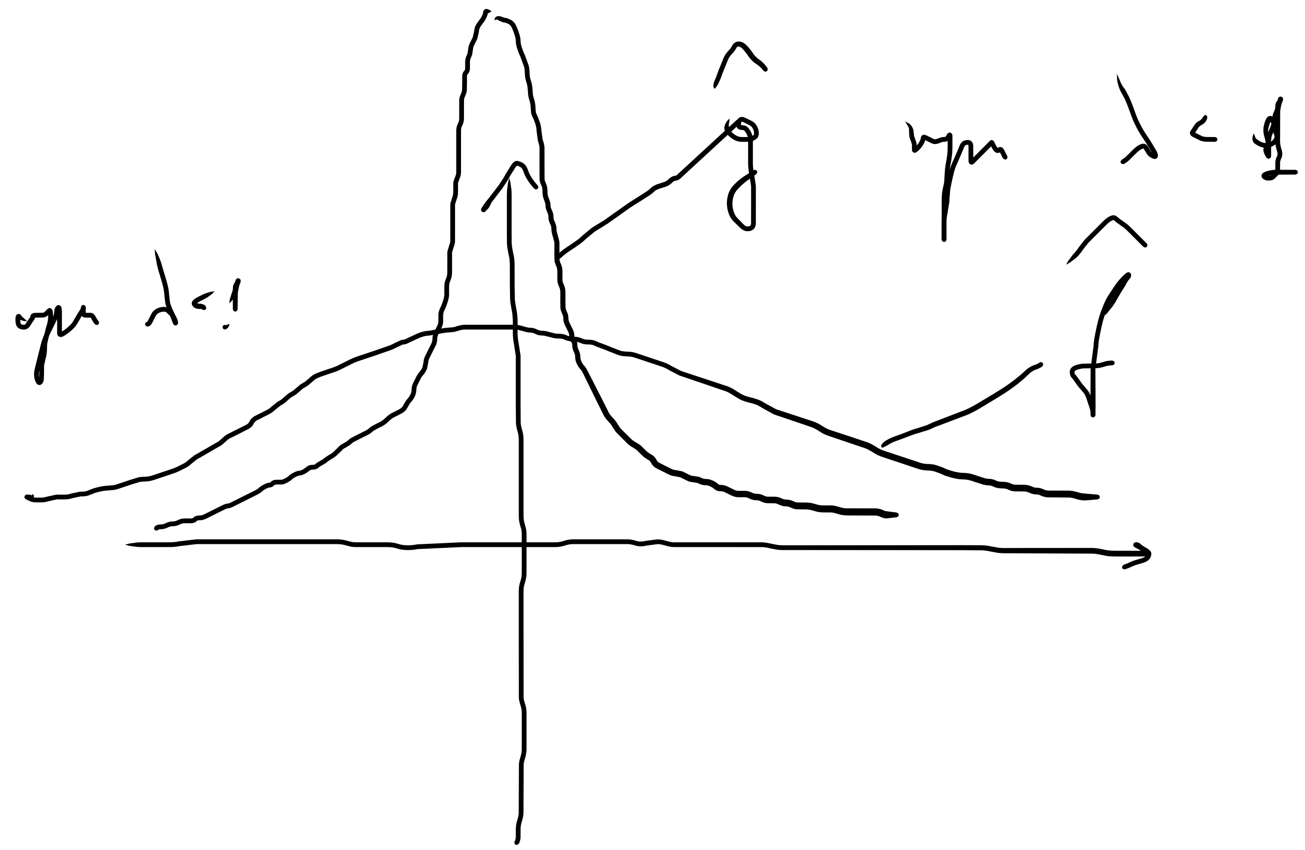
Наиболее важные св-ва.

растяжение - сжатие

1° $$g(x) = f(\lambda x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\lambda^n} \hat{f}\left(\frac{k}{\lambda}\right)$$





сдвиг.

2° $$g(x) := f(x-h)$$

$$\hat{g}(x) = e^{-ik\cdot h} \hat{f}(k)$$

3°) $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$, $\quad f_{x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{(f_{x_j})}(k) = -i k_j \hat{f}(k)$$

Следствие $\left\{ \|k_j \hat{f}(\cdot)\|_\infty \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f_{x_j}(x)|\, dx = C(n) \|f_{x_j}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right.$

Упражнение (Д/3)

4°) $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\quad g(x) := x_j f(x)$, $\quad g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} x_j e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial k_j} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx = \dots$$

Д/з

$$= -i \frac{\partial \hat{f}}{\partial k_j}$$

<u>Следствие</u>: $\left\| \frac{\partial \hat{f}}{\partial k_j} \right\|_\infty \le C \, \| x_j f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

f	$\hat{f}$
гладкость	скорость убыв. на ∞.
скорость убыв. на ∞	гладкость.

Примеры преобразований Фурье.

$\boxed{1^\circ}$ $n = 1$, $\quad f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos kx\, dx - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, i \int_{-1}^{1} \sin kx\, dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{\sin k}{k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin k}{k}.$$

f	$\hat{f}$
$1_{[-1,1]}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin k}{k}$ $\;\notin L^1(\mathbb{R})$
δ	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$L^1(\mathbb{R})\ \cap$ $\;\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\lvert k\rvert}$ $\;\in L^1(\mathbb{R})$
$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, e^{-x^2/4}$ $\;\cap L^1(\mathbb{R})$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2}$ $\;\cap L^1(\mathbb{R})$

но $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin k}{k}\, dk \overset{?}{=} \pi$

несобств. интеграл Римана.

$2^\circ)$ Exp. $\quad f(\underset{\in \mathbb{R}^n}{x}) = 1_{[-1,1]^n}(x)$

$$\underset{\in \mathbb{R}^n}{\hat{f}(k)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} 1_{[-1,1]^n}(x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} dx_1\, e^{-ik_1x_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} dx_2\, e^{-ik_2x_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} dx_n\, e^{-ik_nx_n}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin k_j}{k_j}$$

3°) $\check{\mu} = \delta$ $(n = 1)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta(x) := f(0)$$

$$f \in C_b(\mathbb{R})$$

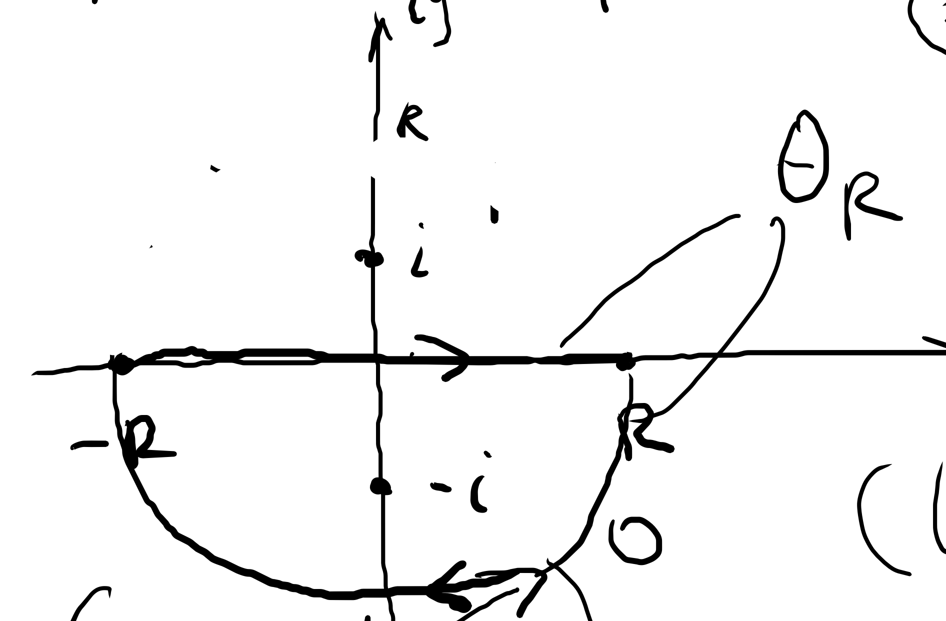
$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, d\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

4°| $n = 1,$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\, dx$$

z $\mathbb{C}$

$$g(z) := \frac{e^{-ikz}}{1+z^2}$$



(Lm. Jordana)

$$-2\pi i \operatorname{Res}(g\,dz\,; -i) = \int_{\theta_R} g(z)\,dz = \int_{-R}^{R} g(x)\,dx + \cancel{\int_{C_R} g(z)\,dz}$$

$$\|$$

$$2\pi i \lim_{z\to i} (z+i)\, g(z)$$

$$\operatorname{Res}(g\,dz\,;\,i) = \lim_{z\to i}\,(z+i)\,\frac{e^{-ikz}}{1+z^2} = \lim_{z\to -i}\frac{e^{-ikz}}{z-i} =$$

$$= e^{-k}\big/(-2i)$$

$$\pi e^{-k} = \oint_{\partial_R} g\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} g(x)\,dx \qquad (k>0)$$

f – rzeczyw. p-yna $\quad (f(-x) = f(x))$

$\Downarrow$

$\hat{f}$ – " – "

$$\hat{f}(k) = \pi e^{-|k|}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|k|}$$

5° (♦) $n = 1$.

гауссиана $\to$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4}$.

$\Rightarrow$ f — чётная; $\hat f \in C^\infty$; $\hat f$ убывает на ∞ быстрее любой степени

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{x}{2} f(x)$$

$$-ik\hat f = \widehat{f'}(k) = -\frac{1}{2}\widehat{xf} = +\frac{i}{2}\hat f'$$

$$\hat f'(k) = -2k\,\hat f(k).$$

$$\frac{d\hat f(k)}{\hat f(k)} = -2k\,dk \quad \Rightarrow \quad \hat f(k) = C\,e^{-k^2}$$

$$C = \hat f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,e^{-x^2/4}\,dx} = 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

[illegible]: $\hat f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-k^2}$

Полезные упражнения.

1). $n = 1$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} e^{-|x|^2/4\sigma}$

$\sigma > 0$

$\hat{f}(k) = ?$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-|x|^2/4\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\sigma}\, \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-|x|^2/4}\right)(\sqrt{\sigma} k) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma k^2}$$ ← провери

2). $n \geq 1$.

↓

д/з

Воспоминания о РЯДАХ Фурье.

$$f \in L^1(S^1) \qquad \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} e^{-ikx} f(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

Во что это превратится для преобр. Фурье?

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dx$$

?? почему и в каком смысле этот инт. вообще должен существовать?!

Но: Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in C_b(\mathbb{R})$,

но, вообще говоря $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$