Скобки Пуассона на коммутативной алгебре

Срок сдачи: 25 апреля 2021

1. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $\{z^i\}_{1\le i\le n}$ — локальные координаты в некоторой области $U \subset M$. Скобка Пуассона любых двух функций f и g из алгебры гладких функций $\mathcal{F}(M)$ в локальных координатах имеет вид:

$$\{f,g\} = \sum_{i,k=1}^{n} \partial_i f(z)\omega^{ik}(z)\partial_k g(z), \qquad \partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial z^i},$$

где $\omega^{ik}(z) = \{z^i, z^k\}$ — пуассонов тензор.

а) Пользуясь определением пуассоновой структуры, выведите условия на пуассонов тензор, которые налагаются на него этим определением.

б) Пусть матрица пуассонова тензора не вырождена в области $U \subset M$: $\det \|\omega^{ik}(z)\| \neq 0$. Обозначим символами $\omega_{ik}(z)$ матричные элементы обратной матрицы:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{ik}(z)\omega^{kj}(z) = \delta_i^j.$$

Докажите, что дифференциальная 2-форма $\Omega = \sum_{i,k} \omega_{ik} dz^i \wedge dz^k$ является замкнутой и невырожденной в области U (то есть, задает симплектическую структуру в области U).

2. Пусть алгебра гладких функций $\mathcal{F}(M)$ на многообразии M снабжена пуассоновой струк-трурой (см. задачу 1.). По любой заданной функции $f \in \mathcal{F}(M)$ определим гамильтоново векторное поле X_f из касательного расслоения TM следующим действием на функции:

$$X_f \triangleright g = \{f,g\}, \quad \forall\, g \in \mathcal{F}(M).$$

а) Докажите, что множество гамильтоновых векторных полей образует алгебру Ли относительно операции коммутирования и стандартных операций сложения и умножения на элементы числового поля.

б) Для невырожденной пуассоновой структруры найдите значение 2-формы $\Omega(X_f, X_g)$ (см. пункт б) задачи 1) на паре произвольных гамильтоновых векторных полей X_f и X_g.

3. Рассмотрим линейное пространство $gl(N)^*$ двойственное к алгебре Ли $gl(N)$. Обозначим символами t_i^j, $1 \le i,j \le N$, координаты в $gl(N)^*$ отностельно базиса, двойственного к базису матричных единиц E_i^j в алгебре $gl(N)$. В алгебре $\mathcal{F}(gl(N)^*)$ полиномиальных функций на $gl(N)^*$ скобка Пуассона-Ли вводится с помощью структурных констант алгебры Ли $gl(N)$:

$$\{t_{i_1}^{j_1}, t_{i_2}^{j_2}\}_{PL} = t_{i_1}^{j_2}\delta_{i_2}^{j_1} - t_{i_2}^{j_1}\delta_{i_1}^{j_2},$$

или, в матричных обозначениях:

$$\{T_1, T_2\}_{PL} = P_{12}T_1 - T_1P_{12},$$

где P_{12} — матрица транспозиции, а $T = \|t_i^j\|$ — $N \times N$ матрица, составленная из координат. Докажите, что однородные полиномы $p_k(t) = \mathrm{Tr}(T^k)$ принадлежат пуассоновому центру скобки Пуасссона-Ли.

4. Введем в алгебре $\mathcal{F}(gl(N)^*)$ билинейную операцию $\{\,,\,\}_{Sk}$ по формуле (обозначения из задачи 3):

$$\{T_1, T_2\}_{Sk} = T_1 T_2 r_{12} - r_{12} T_1 T_2,$$

и распространим ее на любые функции по правилу Лейбница $\{f, gh\}_{Sk} = \{f, g\}_{Sk} h + g\{f, h\}_{Sk}$. Здесь $r_{12} = \|r_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}\|$ — $N^2 \times N^2$ числовая матрица матрица. При каких условиях на r_{12} введенная операция будет скобкой Пуассона?

5. Пуассонова структура $\{\,,\,\}_{Sk}$ называется скобкой Склянина. Докажите, что

а) Линейный полином $p_1(t) = \mathrm{Tr}(T)$ не лежит в пуассоновом центре скобки Склянина, заданной классической r-матрицей Дринфельда-Джимбо.

б)* Детерминант матрицы координат $\det(T)$ является элементом пуассонова центра скобки Склянина.

Указание. Для решения задачи из пункта б) полезны следующие формулы, выражающие детерминант матрицы в терминах полностью антисимметрического тензора ранга N:

$$\sum_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}\, t_{j_1}^{i_1} t_{j_2}^{i_2} \dots t_{j_N}^{i_N} = \det(T)\, \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N},$$

$$\sum_{i_2 \dots i_N} \varepsilon_{a i_2 i_3 \dots i_N}\, \varepsilon^{b i_2 i_3 \dots i_N} = (N-1)!\, \delta_a^b,$$

$$\det(T) = \frac{1}{N!} \sum_{\{i\},\{j\}} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}\, t_{j_1}^{i_1} t_{j_2}^{i_2} \dots t_{j_N}^{i_N}\, \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_N}.$$

6. На алгебре полиномиальных функций можно ввести другую квадратичную пуассонову структуру, связанную с классической r-матрицей (скобка Семенова Тянь-Шанского):

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = r_{21} T_1 T_2 - T_1 T_2 r_{12} + T_2 r_{12} T_1 - T_1 r_{21} T_2,$$

где $r_{21} = P_{12} r_{12} P_{12}$. Пользуясь классической r-матрицей Дринфельда-Джимбо, получите явный вид скобки Семенова Тянь-Шанского для случая $N = 2$ и докажите, что след и детерминант матрицы координат лежат в пуассоновом центре этой скобки. При решении задачи пользуйтесь следующим обозначением для координат пространства $gl(2)^*$:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

7. Пусть $\mathcal{F}_h$ — квантование коммутативной алгебры $\mathcal{F}$, $a \star b$ — новое умножение в векторном пространстве $\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[h]]$, реализующее изоморфизм с квантовой алгеброй $\mathcal{F}_h$:

$$a \star b = a \cdot b + h c_1(a, b) + h^2 c_2(a, b) + \dots$$

Рассмотрим автоморфизм $\omega_h : \mathcal{F}_h \to \mathcal{F}_h$, тождественный на нулевой компоненте $\mathcal{F}_{(0)} = \mathcal{F}_h / (h\mathcal{F}_h)$:

$$\omega_h = \mathrm{id} + h\omega_1 + \dots$$

а) Докажите, что линейное отображение ω_1 является дифференцированием коммутативной алгебры $\mathcal{F}$, то есть,

$$\omega_1(a \cdot b) = \omega_1(a) \cdot b + a \cdot \omega_1(b), \quad \forall\, a, b \in \mathcal{F}.$$

б) Докажите, что антисимметрическая часть $c_1(a,b) - c_1(b,a)$ линейного по h слагаемого в произведении $a \star b$ не изменяется при действии автоморфизма ω_h. Таким образом, алгебра $\omega_h(\mathcal{F}_h)$ также является квантованием коммутативной алгебры $\mathcal{F}$ с той же пуассоновой структурой.