

Семинар 10

Задача 1. Пусть X - гладкая кубика. Докажите, что в любой точке $a \in X \cap He(X)$ кубика X пересекается с гессианом $He(X)$ трансверсально, то есть гессиан $He(X)$ также неособ в точке a , и касательные прямые $\mathbb{T}_a X$ и $\mathbb{T}_a He(X)$ различны. (Трансверсальное пересечение в точке a обозначается так: $X \pitchfork_a He(X)$.)

Задача 2. Докажите, что если a и b - две различные точки перегиба на гладкой кубике X , то прямая $\langle ab \rangle$ пересекает X , помимо a и b , в третьей точке c , которая также является точкой перегиба на X .

Задача 3. Пусть S - конечное множество, а $W \subset 2^S$ - некоторая система подмножеств в S , удовлетворяющая следующим условиям: 1) любое подмножество $A \in W$ состоит из 3 элементов, т.е. $|A| = 3$; 2) для любых двух различных точек $a, b \in S$ существует единственное множество $A \in W$, содержащее точки a и b . Пара (S, W) с указанными свойствами называется *системой Штейнера*. Найдите какие-нибудь системы Штейнера (а если возможно, то перечислите) для малых значений $|S|$, например, для $|S| \leq 10$.

Задача 4. Кубикой Ферма называется плоская кубическая кривая $X = V(F)$, где $F \equiv x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$.
1) Докажите, что кубика Ферма X неособа, и для произвольной точки $a = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$ найдите уравнение поляры $P_a(X)$.
2) Найдите гессиан $He(X)$ и точки перегиба кубики Ферма X .

Задача 5. Пусть X - гладкая кубика, и $a \in X$. Рассмотрим поляру $P_a(X)$. Как мы знаем, коника $P_a(X)$ содежит точку a . Рассмотрим произвольную прямую l через точку a , и пусть l пересекает кубику X , помимо a , еще в точках в различных точках b и c , а конику $P_a(X)$ еще в точке d . Докажите, что a, d, b, c - гармоническая четверка точек.