Введение в теорию интегральных уравнений. Листок 4

Срок сдачи – 13 мая.

Неоднородное интегральное уравнение Фредголъма 2-го рода:

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x,t)\varphi(t)dt = f(x),$$

$K(x,t)$ симметрично; однородное интегральное уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda \int K(x,t)\varphi(t)dt = 0.$$

Неоднородное уравнение имеет единственное решение

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - a_n}\varphi_n(x),$$

при $\lambda \neq \lambda_n$, где $\varphi_n(x)$ - собственные функции однородного уравнения, а

$$a_n = \int f(t)\varphi_n(t)dt.$$

Если параметр λ совпадает с одним из характеристических чисел, например $\lambda = \lambda_k$ ранга q, то решение неоднородного уравнения существуют тогда и только тогда,

$$\int f(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad m = 1, 2, ..., q.$$

В этом случае неоднородное уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - a_n}\varphi_n(x) +$$
$$+ C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x),$$

где C_i – произвольные постоянные.

Построить полные ортонормированные системы собственных функций однородныух уравнений и решить соответствующие неоднородные уравнения:

1. $\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \frac{x}{2}, \qquad K(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \le x \le t, \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \le x \le 1 \end{cases}.$

2. $\varphi(x) + \int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = xe^x, \qquad K(x,t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \le x \le t, \\ \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \le x \le 1 \end{cases}.$

3. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = x - 1, \qquad K(x,t) = \begin{cases} x - t, & 0 \le x \le t, \\ t - x, & t \le x \le 1 \end{cases}.$

4. $\varphi(x) - 2\int\limits_0^{\pi/2} K(x,t)\varphi(t)dt = \cos 2x, \qquad K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \le x \le t, \\ \sin t \cos x, & t \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}.$

С помощью преобразования Лапласа решить следующие интегральные уравнения:

5. $\varphi(x) = e^x - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt.$

6. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt.$

7. $\varphi(x) = e^{2x} + \int\limits_0^x e^{t-x}\varphi(t)dt.$

8. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$

9. $\varphi(x) = \cos x - \int\limits_0^x (x-t)\cos(x-t)\varphi(t)dt.$

10. $\varphi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x e^{-2(x-t)}\varphi(t)dt.$

11. $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt.$

12. $\varphi(x) = \sin x + \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$

13. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)dt.$

14. $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int\limits_0^x [3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2]\varphi(t)dt.$

15. $\varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)dt.$

16. $\varphi(x) = 1 + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt.$

17. $\varphi(x) = e^x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt.$

18. $\varphi(x) = \cos x + 2\int\limits_0^x \varphi(t)dt.$