Введение в римановы поверхности

С. К. Ландо

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2021

На прошлой лекции мы предъявили на всякой алгебраической кривой рода g g-мерное пространство голоморфных 1-форм. Цель сегодняшней лекции — доказать, что это все голоморфные 1-формы на кривой. Для этого мы докажем, что пространство голоморфных 1-форм не может быть более, чем g-мерно. Инструментом доказательства будет интегрирование 1-форм по вещественным путям в комплексных кривых.

Лекция 12. Интегрирование 1-форм

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая, ω — голоморфная дифференциальная 1-форма на ней. Каждому непрерывному пути $\gamma : [0,1] \to C$ сопоставляется интеграл

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*(\omega)$$

1-формы ω вдоль этого пути.

Лекция 12. Интегрирование 1-форм

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая, ω — голоморфная дифференциальная 1-форма на ней. Каждому непрерывному пути $\gamma : [0,1] \to C$ сопоставляется интеграл

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*(\omega)$$

1-формы ω вдоль этого пути.

Точно так же можно интегрировать и мероморфные 1-формы, только в этом случае путь γ не должен проходить через полюса 1-формы ω.

Лекция 12. Интегрирование 1-форм

Пусть C — гладкая алгебраическая кривая, ω — голоморфная дифференциальная 1-форма на ней. Каждому непрерывному пути $\gamma : [0,1] \to C$ сопоставляется интеграл

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*(\omega)$$

1-формы ω вдоль этого пути.
Точно так же можно интегрировать и мероморфные 1-формы, только в этом случае путь γ не должен проходить через полюса 1-формы ω.
Интеграл от 1-формы по пути не меняется при замене его другим путем в том же гомотопичском классе. Если 1-форма ω является точной, т.е. $\omega = df$ для некоторой мероморфной функции f, то по формуле Ньютона–Лейбница ее интеграл не зависит от выбранного пути, соединяющего две данные точки $x_0 = \gamma(0)$ и $x_1 = \gamma(1)$,

$$\int_\gamma df = \int_{x_0}^{x_1} df = f(x_1) - f(x_0).$$

В частности, интеграл от точной 1-формы по любому замкнутому пути равен 0.

Лекция 12. Периоды 1-форм

Интеграл 1-формы на алгебраической кривой вдоль замкнутого пути на этой кривой называется *периодом* этой 1-формы. Выберем на кривой C рода g какой-нибудь набор $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}\}$ из $2g$ замкнутых путей с началом и концом в данной точке $x_0 \in C$, классы гомологий которых образуют базис в группе одномерных гомологий $H_1(C, \mathbb{Z})$.

Lemma

Если все периоды гладкой вещественной 1-формы ω по путям γ_i равны нулю, то эта 1-форма точна, $\omega = df$ для некоторой гладкой вещественной функции f.

Доказательство. Функция f строится стандартным образом: мы полагаем $f(x) = \int_{x_0}^{x} \omega$. Поскольку все периоды 1-формы ω равны 0, этот интеграл не зависит от выбора гомотопического класса пути, соединяющего точки x_0 и x.

Интеграл 1-формы на алгебраической кривой вдоль замкнутого пути на этой кривой называется *периодом* этой 1-формы. Выберем на кривой C рода g какой-нибудь набор $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}\}$ из $2g$ замкнутых путей с началом и концом в данной точке $x_0 \in C$, классы гомологий которых образуют базис в группе одномерных гомологий $H_1(C, \mathbb{Z})$.

Lemma

Если все периоды гладкой вещественной 1-формы ω по путям γ_i равны нулю, то эта 1-форма точна, $\omega = df$ для некоторой гладкой вещественной функции f.

Доказательство. Функция f строится стандартным образом: мы полагаем $f(x) = \int_{x_0}^{x} \omega$. Поскольку все периоды 1-формы ω равны 0, этот интеграл не зависит от выбора гомотопического класса пути, соединяющего точки x_0 и x.

Corollary

Размер пространства голоморфных 1-форм на алгебраической кривой рода g не превышает $2g$.

Действительно, разность двух голоморфных 1-форм с одинаковыми периодами имеет нулевые периоды, а значит является дифференциалом голоморфной функции, т.е. нулем.

Лекция 12. Антиголоморфные 1-формы

Каждой голоморфной 1-форме ω можно сопоставить комплексно сопряженную ей антиголоморфную 1-форму $\bar{\omega}$. Мы хотим доказать, что если голоморфные 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_k$ линейно независимы, то классы когомологий 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_k, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_k$ линейно независимы. Отсюда сразу вытекает, что $k \leq g$.

Каждой голоморфной 1-форме ω можно сопоставить комплексно сопряженную ей антиголоморфную 1-форму $\bar{\omega}$. Мы хотим доказать, что если голоморфные 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_k$ линейно независимы, то классы когомологий 1-форм $\omega_1, \ldots, \omega_k, \bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_k$ линейно независимы. Отсюда сразу вытекает, что $k \leq g$.

Lemma

Если для пары голоморфных 1-форм ω_1, ω_2 1-форма $\omega_1 + \bar{\omega}_2$ является дифференциалом гладкой функции, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Лекция 12. Антиголоморфные 1-формы

Lemma

Если для пары голоморфных 1*-форм* ω_1, ω_2 1*-форма* $\omega_1 + \bar{\omega}_2$ *является дифференциалом гладкой функции, то* $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Lemma

Если для пары голоморфных 1-форм ω_1, ω_2 1-форма $\omega_1 + \bar{\omega}_2$ является дифференциалом гладкой функции, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Доказательство. Пусть $\omega_1 \wedge \bar{\omega}_2 = df$. В локальной координате $z = u + iv$ имеем $\bar{z} = u - iv$, $dz \wedge d\bar{z} = -2idu \wedge dv$ и $\omega_2 = g_2(z)dz$. Отсюда

$$\frac{i}{2}\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = |g_2(z)|^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = |g_2(z)|^2 du \wedge dv.$$

Это означает, что если $\omega_2 \neq 0$, то интеграл $\iint_C \frac{i}{2}\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 > 0$. С другой стороны,

$$\omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \omega_2 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2 = \omega_2 \wedge (\omega_1 + \bar{\omega}_2) = \omega_2 \wedge df,$$

и

$$d(f\omega_2) = df \wedge \omega_2 + fd\omega_2 = df \wedge \omega_2,$$

т.е. 1-форма $df \wedge \omega_2$ точна, а значит,

$$\iint_C df \wedge \omega_2 = 0.$$

Для мероморфных 1-форм утверждение о том, что интеграл по пути не зависит от выбора пути с данными концами в данном гомотопическом классе перестает быть верным. Точнее, оно остается верным но не для кривой C, а для этой кривой проколотой в полюсах 1-формы. Гомологическое описание мероморфной 1-формы дополняется описанием ее интегралов по путям, обходящим вокруг ее полюсов, — *вычетов*.

Для мероморфных 1-форм утверждение о том, что интеграл по пути не зависит от выбора пути с данными концами в данном гомотопическом классе перестает быть верным. Точнее, оно остается верным но не для кривой C, а для этой кривой проколотой в полюсах 1-формы. Гомологическое описание мероморфной 1-формы дополняется описанием ее интегралов по путям, обходящим вокруг ее полюсов, — *вычетов*.
Пусть мероморфная 1-форма ω в локальной координате z в окрестности своего полюса порядка $k \geq 1$ раскладывается в ряд Лорана

$$\omega = \left(\frac{a_{-k}}{z^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots\right) dz, \qquad a_{-k} \neq 0.$$

Интеграл от каждого монома этого ряда кроме монома $a_{-1}dz/z$ по петле γ, обходящей точку $z = 0$ в положительном направлении, равен 0: интегрируется дифференциал функции. Для исключительного монома

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \frac{a_{-1}dz}{z} = a_{-1}\int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t + i\cos t)dt}{\cos t + i \sin t} = 2\pi i a_{-1}.$$

Величина $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega$ называется *вычетом* 1-формы ω в ее полюсе. Она не зависит от выбора локальной координаты z.

Theorem

Сумма вычетов мероморфной 1*-формы на гладкой алгебраической кривой равна* 0.

Theorem

Сумма вычетов мероморфной 1*-формы на гладкой алгебраической кривой равна* 0*.*

Доказательство 1. Представим поверхность как результат склейки сторон многоугольника. Сумма вычетов 1-формы — ее интеграл по композиции петель, обходящих все полюса. Эта композиция гомотопна границе многоугольника. Граница гомологична нулю, так как по каждому отрезку проходит два раза — в противоположных направлениях.

Theorem

Сумма вычетов мероморфной 1-формы на гладкой алгебраической кривой равна 0.

Доказательство 1. Представим поверхность как результат склейки сторон многоугольника. Сумма вычетов 1-формы — ее интеграл по композиции петель, обходящих все полюса. Эта композиция гомотопна границе многоугольника. Граница гомологична нулю, так как по каждому отрезку проходит два раза — в противоположных направлениях.

Доказательство 2. Выберем маленькие диски с центром в каждом из полюсов 1-формы ω. На дополнении к этим дискам ω голоморфна. Значит ее дифференциал равен нулю, и по формуле Стокса ее интеграл по границе равен нулю. С другой стороны, этот интеграл — сумма вычетов 1-формы ω, с точностью до умножения на $-1/2\pi i$.

Лекция 12. Линейные расслоения над комплексными кривыми; дивизоры

Пусть $p : E \to C$ — линейное расслоение над кривой C. Всякому его ненулевому мероморфному сечению $\sigma : C \to E$ сопоставляются два набора точек на C — нули и полюса сечения. Кроме того, каждому нулю и каждому полюсу приписано натуральное число — порядок нуля или полюса. Совокупность нулей и полюсов сечения, с учетом их кратностей, называется *дивизором* сечения и записывается в виде формальной суммы

$$(\sigma) = \sum a_i x_i, \qquad a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

положительные коэффициенты это порядки нулей, отрицательные — порядки полюсов.

Лекция 12. Линейные расслоения над комплексными кривыми; дивизоры

Пусть $p : E \to C$ — линейное расслоение над кривой C. Всякому его ненулевому мероморфному сечению $\sigma : C \to E$ сопоставляются два набора точек на C — нули и полюса сечения. Кроме того, каждому нулю и каждому полюсу приписано натуральное число — порядок нуля или полюса. Совокупность нулей и полюсов сечения, с учетом их кратностей, называется *дивизором* сечения и записывается в виде формальной суммы

$$(\sigma) = \sum a_i x_i, \qquad a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

положительные коэффициенты это порядки нулей, отрицательные — порядки полюсов.

Пример. Для $C = \mathbb{C}P^1$ дивизор функции z равен

$$(z) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot \infty,$$

а дивизор 1-формы dz равен

$$(dz) = -2 \cdot \infty.$$

Definition

Дивизором на кривой C называется формальная линейная комбинация конечного числа ее точек с ненулевыми целыми коэффициентами, $\sum a_i \cdot x_i$, $a_i \neq 0$.

Definition

Дивизором на кривой C называется формальная линейная комбинация конечного числа ее точек с ненулевыми целыми коэффициентами, $\sum a_i \cdot x_i$, $a_i \neq 0$.

Дивизоры также естественно записывать в виде сумм

$$\sum_{x\in C} a_x \cdot x, \qquad a_x \in \mathbb{Z},$$

по всем точкам кривой C, в которых лишь конечное число коэффициентов a_x отлично от нуля.

Definition

Дивизором на кривой C называется формальная линейная комбинация конечного числа ее точек с ненулевыми целыми коэффициентами, $\sum a_i \cdot x_i$, $a_i \neq 0$.

Дивизоры также естественно записывать в виде сумм

$$\sum_{x \in C} a_x \cdot x, \qquad a_x \in \mathbb{Z},$$

по всем точкам кривой C, в которых лишь конечное число коэффициентов a_x отлично от нуля.

Дивизоры образуют коммутативную группу относительно сложения:

$$\sum_{x \in C} a_x \cdot x + \sum_{x \in C} b_x \cdot x = \sum_{x \in C} (a_x + b_x) \cdot x.$$

Нулем в этой группе является нулевой дивизор.

Количество нулей каждой мероморфной функции с учетом кратностей равно количеству ее полюсов с учетом их кратностей. Поэтому для дивизора $(f) = \sum a_i \cdot x_i$ мероморфной функции имеем $\sum a_i = 0$.

Умножив ненулевое мероморфное сечение $\sigma : C \to E$ расслоения $p : E \to C$ на ненулевую мероморфную функцию $f : C \to \mathbb{C}P^1$, мы получим новое сечение $f\sigma : C \to E$, дивизор которого равен

$$(f\sigma) = (f) + (\sigma).$$

Поэтому сумма коэффициентов дивизора $(f\sigma)$ такая же, как у (σ). Поскольку отношение любых двух ненулевых сечений данного линейного расслоения является мероморфной функцией, дивизоры всех ненулевых сечений одного линейного расслоения имеют одну и ту же сумму коэффициентов.

Лекция 12. Степень дивизора

Количество нулей каждой мероморфной функции с учетом кратностей равно количеству ее полюсов с учетом их кратностей. Поэтому для дивизора $(f) = \sum a_i \cdot x_i$ мероморфной функции имеем $\sum a_i = 0$.

Умножив ненулевое мероморфное сечение $\sigma : C \to E$ расслоения $p : E \to C$ на ненулевую мероморфную функцию $f : C \to \mathbb{C}P^1$, мы получим новое сечение $f\sigma : C \to E$, дивизор которого равен

$$(f\sigma) = (f) + (\sigma).$$

Поэтому сумма коэффициентов дивизора $(f\sigma)$ такая же, как у (σ). Поскольку отношение любых двух ненулевых сечений данного линейного расслоения является мероморфной функцией, дивизоры всех ненулевых сечений одного линейного расслоения имеют одну и ту же сумму коэффициентов.

Definition

Степенью дивизора на кривой C называется сумма его коэффициентов, $\deg(\sum a_i \cdot x_i) = \sum a_i$. *Степенью линейного расслоения* называется степень дивизора любого его ненулевого мероморфного сечения.

Количество нулей каждой мероморфной функции с учетом кратностей равно количеству ее полюсов с учетом их кратностей. Поэтому для дивизора $(f) = \sum a_i \cdot x_i$ мероморфной функции имеем $\sum a_i = 0$.

Умножив ненулевое мероморфное сечение $\sigma : C \to E$ расслоения $p : E \to C$ на ненулевую мероморфную функцию $f : C \to \mathbb{C}P^1$, мы получим новое сечение $f\sigma : C \to E$, дивизор которого равен

$$(f\sigma) = (f) + (\sigma).$$

Поэтому сумма коэффициентов дивизора $(f\sigma)$ такая же, как у (σ). Поскольку отношение любых двух ненулевых сечений данного линейного расслоения является мероморфной функцией, дивизоры всех ненулевых сечений одного линейного расслоения имеют одну и ту же сумму коэффициентов.

Definition

Степенью дивизора на кривой C называется сумма его коэффициентов, $\deg(\sum a_i \cdot x_i) = \sum a_i$. *Степенью линейного расслоения* называется степень дивизора любого его ненулевого мероморфного сечения.

Пример. Степень тривиального линейного расслоения $C \times \mathbb{C} \to C$ равна 0. Степень кокасательного расслоения к $\mathbb{C}P^1$ равна -2.

Дивизоры степени 0 образуют подгруппу в группе дивизоров. Дивизоры мероморфных функций образуют подгруппу в этой подгруппе; эти дивизоры называются *главными*.

Definition

Два дивизора называются *линейно эквивалентными*, если их разность является дивизором мероморфной функции. Факторгруппа группы дивизоров по подгруппе главных дивизоров называется *группой классов дивизоров*.

Дивизоры любых двух сечений одного линейного расслоения линейно эквивалентны между собой.

Дивизоры степени 0 образуют подгруппу в группе дивизоров. Дивизоры мероморфных функций образуют подгруппу в этой подгруппе; эти дивизоры называются *главными*.

Definition

Два дивизора называются *линейно эквивалентными*, если их разность является дивизором мероморфной функции. Факторгруппа группы дивизоров по подгруппе главных дивизоров называется *группой классов дивизоров*.

Дивизоры любых двух сечений одного линейного расслоения линейно эквивалентны между собой.

Упражнение. Пусть C — эллиптическая кривая, $p, q \in C$ — различные точки на ней. Существует ли мероморфная функция f на C с дивизором $(f) = 1 \cdot p - 1 \cdot q$?

- Докажите, что касательное и кокасательное расслоения к проективной прямой не являются тривиальными.
- Пусть $E_1 \to C$, $E_2 \to C$ — два линейных расслоения над кривой C, $E_1 \otimes_C E_2$ — линейное расслоение, являющееся их тензорным произведением. Докажите, что

$$\deg(E_1 \otimes_C E_2) = \deg(E_1) + \deg(E_2).$$

- Докажите, что степени двойственных линейных расслоений противоположны.

Семинар 12.

- Приведите пример линейного расслоения степени 1 над проективной прямой.
- Докажите, что для каждого целого d над проективной прямой есть линейное расслоение степени d.
- Чему равна степень касательного расслоения к кривой рода g? Кокасательного расслоения?

Семинар 12.

- Пусть $E_1 \to C$, $E_2 \to C$ — два линейных расслоения над данной кривой C, $\sigma_1 : C \to E_1$, $\sigma_2 : C \to E_2$ — ненулевые мероморфные сечения этих расслоений. Докажите, что если $(\sigma_1) = (\sigma_2)$, то расслоения E_1, E_2 изоморфны.
- Опишите все линейные расслоения над проективной прямой.
- Приведите пример нетривиального линейного расслоения над эллиптической кривой. Чему равна степень этого расслоения? Укажите класс линейной эквивалентности дивизоров его сечений.