

## Семинар 11

**Задача 1.** (1) Пусть  $X$  - гладкая кубика. Докажите, что в любой точке  $a \in X \cap He(X)$  кубика  $X$  пересекается с гессианом  $He(X)$  трансверсально, то есть гессиан  $He(X)$  также неособ в точке  $a$ , и касательные прямые  $T_a X$  и  $T_a He(X)$  различны. (Трансверсальное пересечение в точке  $a$  обозначается так:  $X \pitchfork_a He(X)$ .)

(2) Докажите, что прямая  $T_a X$  касается гессиана  $He(X)$  в некоторой точке  $b$ , отличной от точки  $a$ .  
*Указание:* Комментарии к решению этой задачи были даны на семинаре 11 - см. видео и pdf-файл семинара.

**Задача 2.** На семинаре 10 было дано определение закона композиции на гладкой кубике  $X$ . Докажите, что этот закон удовлетворяет свойствам коммутативной группы.

*Указание:* Ключевым свойством здесь является свойство ассоциативности закона композиции. Для его доказательства полезно воспользоваться следующим утверждением, доказательство которого было подробно разобрано на семинаре 11 (см. видеофайл семинара): Даны две кубические кривые  $X_1$  и  $X_2$ , распавшиеся на тройки различных прямых. Пусть кривые  $X_1$  и  $X_2$  пересекаются в 9 различных точках. Тогда кубика  $X$ , проходящая через 8 из этих точек, проходит и через 9-ую точку.

**Задача 3.** Групповой закон (закон композиции)  $X \times X \rightarrow X : (a, b) \mapsto a * b$  на гладкой кубике  $X$  в силу его коммутативности будем записывать аддитивно, то есть обозначать  $a * b$  через  $a + b$ . В частности, для любого натурального числа  $n$  под точкой  $na$  на кубике  $X$  будем понимать точку  $(\dots((a+a)+a)+\dots+a)$  (сумма точки  $a$  с самой собой  $n$  раз). Пусть точка  $0 \in X$  (нейтральный элемент группового закона) является точкой перегиба на  $X$ . Докажите, что тогда всякая точка перегиба  $a \in X$  удовлетворяет равенству  $3a = 0$ , и обратно, всякое решение этого уравнения является точкой перегиба.

**Задача 4.** Пользуясь предыдущей задачей, докажите, что если  $a$  и  $b$  - две различные точки перегиба на гладкой кубике  $X$ , то прямая  $\langle ab \rangle$  пересекает  $X$ , помимо  $a$  и  $b$ , в третьей точке  $c$ , которая также является точкой перегиба на  $X$ .

**Задача 5.** Пусть  $X$  - гладкая кубика, и  $a \in X$ . Рассмотрим поляру  $P_a(X)$ . Как мы знаем, коника  $P_a(X)$  содежит точку  $a$ . Рассмотрим произвольную прямую  $l$  через точку  $a$ , и пусть  $l$  пересекает кубик  $X$ , помимо  $a$ , еще в точках  $b$  и  $c$ , а конику  $P_a(X)$  еще в точке  $d$ . Докажите, что  $a, d, b, c$  - гармоническая четверка точек.