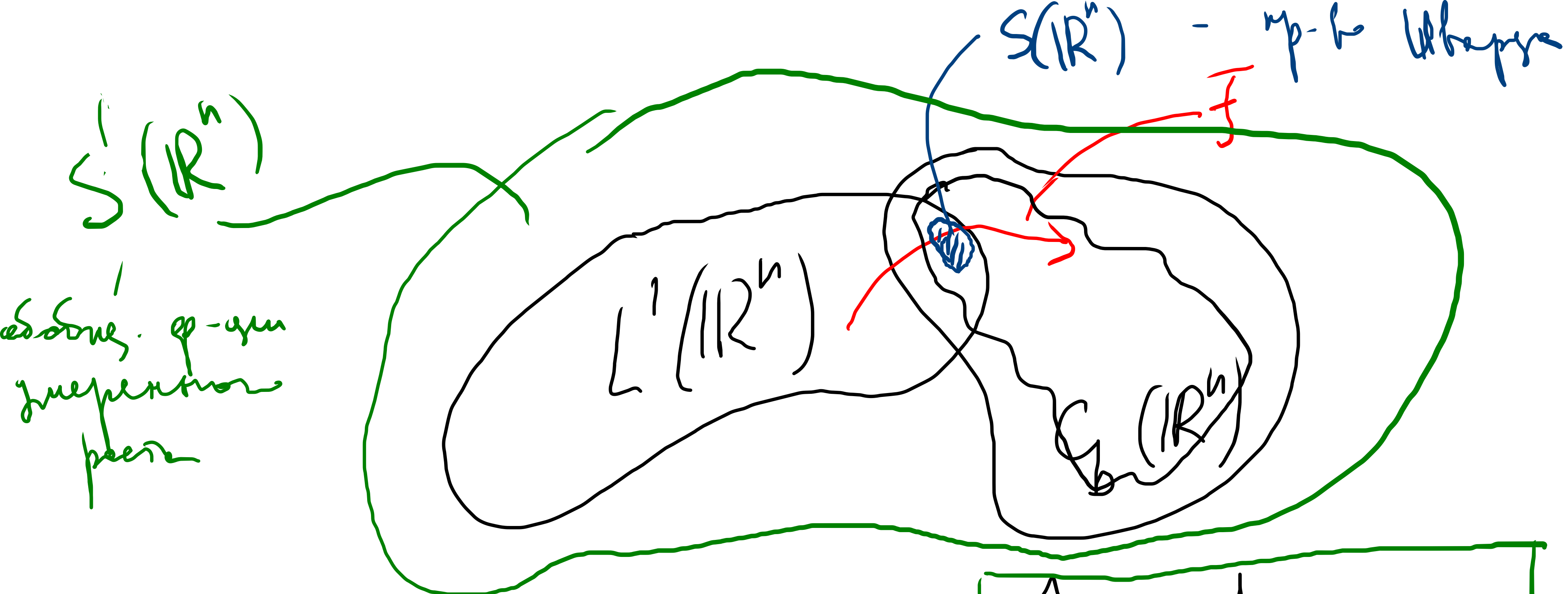


$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$\hat{f} = \mathcal{F} f.$

$L^1(\mathbb{R}^n)$

$\cup$

$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$

и обратимо

Важный факт:

$\boxed{\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)}$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k)\, e^{ik\cdot x}\, dk =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(-k)\, e^{-ik\cdot x}\, dk.$$

N.B.:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \mathcal{F}(R\hat{f}),$$

где $R\hat{f}(k) = \hat{f}(-k).$

(I) $S(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \rho_{\alpha,\beta}(f) < +\infty, \ \alpha, \beta \}.$

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \| x^\alpha D^\beta f \|_\infty$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n.$$

1°) S – метризуемо, (метрика задаётся счётным семейством полунорм $\rho_{\alpha,\beta}$) полное.

пр-во Фреше

2°. $\underbrace{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \hookrightarrow S(\mathbb{R}^n)$

$\subset$

$\hookrightarrow$ – непр. вложение.

т.е. $i(\varphi) := \varphi$ – непрерывн.

Иначе говоря, $\underbrace{\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \varphi} \Rightarrow \varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$

Наоборот – неверно! Пример: $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\varphi_k(x) = 2^{-k} f(x/k)$$

$$\varphi_k \rightrightarrows 0.$$

$$\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0.$$

$$\varphi_k \not\xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} (\cdot)$$

Упражнение (почти)

$\underline{3^\circ}$ $f \in S(\mathbb{R}^n) \iff \| x^\alpha D^\beta f \|_\infty < +\infty$

$\iff \lim\limits_{|x|\to\infty} x^\alpha D^\beta f(x) = 0$

$\iff (1+|x|^2)^N D^\beta f$ огр.

$\iff \| x^\alpha D^\beta f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$

$$\|x^\alpha D^\beta f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \| P(x) \underbrace{\frac{1}{P(x)}}_{\in L^1} x^\alpha D^\beta f \|_1 \leq \underbrace{\|\tfrac{1}{P}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}_{\text{Hölder}} \underbrace{\| P x^\alpha D^\beta f \|_\infty}$$

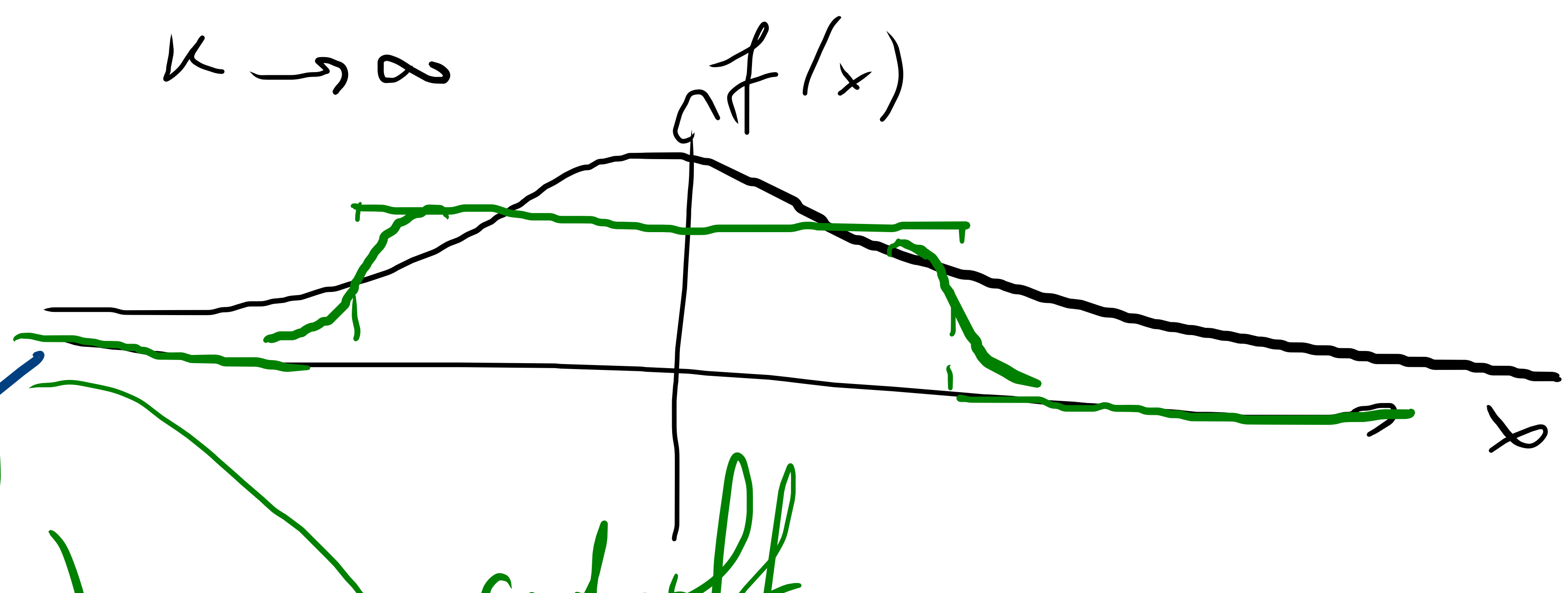
Полезное упражнение.

4° $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $S(\mathbb{R}^n)$

(т.е. $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ $\exists f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$)

$$f_k \xrightarrow[k\to\infty]{S(\mathbb{R}^n)} f.$$

Идея: ?



Хотелось бы

$$f_k(x) = f(x)\cdot \cancel{1_{B_k(0)}(x)}$$

cut-off

(smooth cut-off function)

$\boxed{5^\circ}$ $u \longmapsto D^\beta u \in S(\mathbb{R}^n)$ — непр.

$u \in S(\mathbb{R}^n)$

$u \longmapsto x^\alpha u$ — непр.

Th. $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, непрерывно, непрерывно обратимо.

Д-во. $f_j \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_j \to 0$

непр. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\underbrace{\| k^\alpha (D^\alpha \hat{f}_j)(k) \|_\infty}_{} \to 0 \quad \le C \| \widehat{D^\alpha(x^\beta f_j)} \|_\infty \le$$

$$\le C \| D^\alpha (x^\beta f_j) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_i \| x^{\alpha_i} D^{\beta_i} f_j \|_1 \to 0$$

т.е. $\rho_{\alpha\beta}(\hat{f}) < +\infty \Rightarrow \hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$

$$f_j \to 0 \quad \text{в } S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f}_j \to 0 \quad \text{в } S(\mathbb{R}^n)$$

<u>Обратность $\mathcal{F}$.</u>

1) Сюръективность. $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

$$g = \mathcal{F}^{-1}(f) \in \underline{S(\mathbb{R}^n)}.$$

формальное обратное

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{i x \cdot y}\, dy = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(-y)}\, e^{-i x \cdot y}\, dy = \mathcal{F}(\underbrace{Rf}_{\in S(\mathbb{R}^n)})$$

$$\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot s} \, e^{iy\cdot s} f(y)\,dy\,ds$$

$$\overset{s \mapsto -s}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot s} \, e^{-iy\cdot s} f(y)\,dy\,d- =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f.$$

[illegible]: $f \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

$\hat{f} = \mathcal{F}(f) = 0 \Rightarrow f = \mathcal{F}^{-1}(0) = 0.$

Обратное ф-п $\mathcal{F}^{-1} : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ непр.

$$\mathcal{F}^{-1} g = \underbrace{\mathcal{F}}_{\text{непр.}} (\underbrace{R}_{\text{непр.}} g)$$

$$(Rg)(y) := g(-y) \quad , \text{ч.т.д.}$$

Обобщённые ф-ции умеренного роста

$$S'(\mathbb{R}^n) = \{ u - \text{лин. непр. функционал на } S(\mathbb{R}^n) \}$$

Наблюдения о $S'(\mathbb{R}^n)$.

1° | $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^n)$

$\Downarrow$

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \supset S'(\mathbb{R}^n)$

обобщенные ф-ции

$X \hookrightarrow Y$

$X' \supset Y'$

2° | $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$\not\subset S'(\mathbb{R}^n)$.

Пример. $n = 1$, $f(x) = e^{x}$

$f \in L^p_{loc}$ $\forall p \geq 1$.

$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, но $f \notin S'(\mathbb{R})$.

Д-во: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. $\varphi_k(x) = 2^{-k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$

$\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R})} 0$.

$$\langle \varphi_k, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi_k = 2^{-k}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \varphi\left(\frac{x}{k}\right)dx = k2^{-k}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ky}\varphi(y)\,dy$$

$\exists\ \varphi(x) = 1$ на $[0,1]$, $\varphi \geq 0$.

$$\geq k2^{-k}\int_0^1 e^{ky}\,dy = \frac{k2^{-k}e^{ky}}{k}\Big|_0^1 = 2^{-k}(e^k - 1) \not\to 0.$$

$\varphi_k \in S(\mathbb{R}^n)$ $\qquad$ $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$

$\left(\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \right)$

$\langle \varphi_k, f \rangle \not\longrightarrow 0$, т.е. $f \notin S'(\mathbb{R}^n)$

3°) $L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ $\qquad$ $p \geq 1$.

(но не $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$!)