

# Структуры алгебры Хопфа

Срок сдачи листка: 12 мая 20201

1. Докажите корректность определения структур алгебры Хопфа для групповой алгебры  $\mathbb{K}[G]$  конечной группы  $G$  и алгебры  $\text{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$  линейных функций на этой групповой алгебре. Докажите также, что эти алгебры Хопфа дуальны друг другу относительно билинейной формы

$$\langle f, v \rangle = f(v), \quad f \in \text{Fun}_{\mathbb{K}}(G), \quad v \in \mathbb{K}[G].$$

А именно, проверьте явным вычислением следующее:

- а) Отображения  $\Delta_G, \varepsilon_G$  и  $\Delta_F, \varepsilon_F$  являются гомоморфизмами, а отображения  $S_G$  и  $S_F$  — антигомоморфизмами.
- б) Для всех операций в алгебрах Хопфа  $\mathbb{K}[G]$  и  $\text{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$  выполнены аксиомы определения алгебры Хопфа.
- в) Операции в алгебре Хопфа  $\mathbb{K}[G]$  связаны с операциями в алгебре Хопфа  $\text{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$  посредством билинейной формы в соответствии с Определением 2.3.

Все необходимые определения даны в конспекте лекций в формулировках Утверждений 3.2, 3.3 и 3.4.

2. Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра Хопфа над полем  $\mathbb{K}$  с умножением  $m$ , единичным элементом  $e_{\mathcal{A}}$  и коалгебраическими операциями  $\Delta, \varepsilon$  и  $S$ . Рассмотрим алгебру  $\mathcal{A}^*$  — дуальную алгебру Хопфа относительно невырожденной билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  (см. Определение 2.3 в записках лекций). Пользуясь определением дуальных структур  $m^*, \Delta^*$  и  $\varepsilon^*$ , докажите следующее:

- а) Отображение  $\Delta^*$  действительно гомоморфизм алгебр  $\mathcal{A}^*$  и  $\mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*$  с умножением  $m^*$ .
- б) Операции  $m^*, \eta^*, \Delta^*$  и  $\varepsilon^*$  действительно удовлетворяют соотношению:

$$m^* \circ (\text{id} \otimes S^*) \circ \Delta^* = \eta^* \circ \varepsilon^*$$

3. Проверьте явным вычислением выполнение соотношений

$$P_{12} \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S \quad \text{и} \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon$$

для трех примеров алгебр Хопфа, рассмотренных в записках лекций: для универсальной обертывающей алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{L})$  алгебры Ли  $\mathcal{L}$ , для групповой алгебры  $\mathbb{K}[G]$  конечной группы  $G$  и для алгебры  $\text{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$  линейных функций на групповой алгебре группы  $G$ .

4. Пусть  $\hat{T} : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(V)$  представление алгебры Хопфа  $\mathcal{A}$  в конечномерном линейном пространстве  $V$ . Пусть в некотором базисе  $\{e_i\}$  пространства  $V$  оператор  $\hat{T}(a)$   $a \in \mathcal{A}$  задается матрицей  $T = \|T_{ij}(a)\|$ . Найдите матрицу оператора, представляющего этот же элемент  $a$  в алгебре  $\text{End}(V^*)$  дуального пространства  $V^*$  в базисе  $\{\epsilon_i\}$ , двойственном базису  $\{e_i\}$ :  $\langle \epsilon_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ .

5. Пусть  $\hat{T} : G \rightarrow \text{End}(V)$  представление конечной группы  $G$  в конечномерном линейном  $\mathbb{K}$ -пространстве  $V$ . Пользуясь структурой алгебры Хопфа на групповой алгебре  $\mathbb{K}[G]$ , постройте представление  $G$  в линейном пространстве  $\text{End}(V) \simeq V \otimes V^*$ .

6. Докажите Утверждение 3.5 из записок лекций об алгебрах Хопфа и найдите явный вид операции коумножения на базисных линейных функциях  $L_i^j$  (обозначение из записок лекций).