17.03-2021 — 24.03.2021

Структура алгебры Хопфа: определение и примеры

В квантовых матричных алгебрах, которые мы получили в результате квантования определенных пуассоновых структур в алгебре полиномиальных функций на пространстве $\mathrm{Mat}^*_N(\mathbb{C})$, можно вввести новые операции — так называемое коумножение, коединицу и антипод. Эти операции в определенном смысле дуальны умножению и операции вложения числового поля в алгебру, который строится с помощью единичного элемента. Упомянутые (ко)операции превращают наши алгебры в алгебры Хопфа (биалгебры с антиподом). Структура алгебры Хопфа в алгебре $\mathcal{A}$ позволяет легко развивать теорию ее представлений, поскольку дает возможность превращать в $\mathcal{A}$-модуль любые (квази)тензорные произведения $\mathcal{A}$-модулей, а также определять структуру $\mathcal{A}$-модуля на пространстве V^*, двойственном к пространству $\mathcal{A}$-модуля V. В конце данных заметок приведена некоторая литература, которая может быть полезна при изучении алгебр Хопфа и квантовых групп.

1 Определения и основные объекты

В этом разделе напоминаются определения двойственного линейного пространства, ассоциативной алгебры с единицей, алгебры Ли и ее универсальной обертывающей. Все эти понятия уже встречались нам ранее и, конечно же, хорошо вам известны из курсов алгебры и геометрии. Мы обратимся к этим определениям не только для того, чтобы зафиксировать соглашения и обозначения, но и чтобы ввести удобный графический язык — коммутативные диаграммы объектов и связывающих их отображений. На языке коммутативных диаграмм связь алгебраических и коалгебраических структур особенно проста и наглядна.

Дуальное (двойственное) линейное пространство

Пусть задано линейное пространство V над числовым полем $\mathbb{K}$ (мы ограничимся полями нулевой характеристики, реально нам достаточно поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ и поля комплексных чисел $\mathbb{C}$). Двойственным или дуальным пространствомназывется множество линейных функционалов на V. Мы дадим эквивалентное определение.

Определение 1.1 Линейное пространство V^* над полем $\mathbb{K}$ называется *(левым) дуальным пространством* к линейному $\mathbb{K}$-пространству V, если существует невырожденная билинейная форма $\langle\,,\,\rangle:\ V^*\times V\to\mathbb{K}$.

Замечание. Иногда вводится билинейная форма $\langle\,,\,\rangle : V\times V^*\to\mathbb{K}$ и соответствующее пространство V^* называется правым двойственным к V. Эта довольно тонкая разница проявляется в теории представлений некоммутативных алгебр и пока мы на нее внимания обращать не будем.

Свойство невырожденности билинейной формы в определении дуального пространства означает следующее:

$$\begin{aligned}
&\forall\boldsymbol{\xi}\in V^*,\,\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0},\quad \exists\boldsymbol{v}\in V: \qquad \langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{v}\rangle\neq 0,\\
&\forall\boldsymbol{u}\in V,\ \ \boldsymbol{u}\neq\mathbf{0},\quad \exists\boldsymbol{\eta}\in V^*: \qquad \langle\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{u}\rangle\neq 0.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

То есть, никакой ненулевой вектор из V^* не ортогонален (относительно формы $\langle\, , \,\rangle$) сразу всему пространству V и наоборот.

Для *конечномерных* линейных пространств два утверждения в (1.1) становятся эквивалентными и могут быть заменены любым одним из них. Прямым следствием невырожденности билинейной формы для конечномерных пространств является тот факт, что $\dim V^* = \dim V$. Если мы зафиксируем некоторый базис $\{\boldsymbol{\phi}^i\}$ в пространстве V^* и $\{\boldsymbol{f}_i\}$ в пространстве V, то билинейная форма полностью определяется матрицей своих значений на базисных элементах дуальных пространств:

$$\langle \boldsymbol{\phi}^j, \boldsymbol{f}_i\rangle = \omega_i^j, \quad 1 \le i, j \le \dim V. \tag{1.2}$$

Наличие такой формы позволяет трактовать вектора пространства V^* как линейные функционалы на пространстве V. Точно так же вектора пространства V могут считаться линейными функционалами на V^*, поскольку V тоже дуальное пространство (правое) для V^* относительно той же самой билинейной формы.

Значение произвольного линейного функционала $\boldsymbol{\xi} = \xi_i \boldsymbol{\phi}^i$ из пространства V^* на некотором векторе $\mathbf{v} = v^i \mathbf{f}_i$ пространства V дается формулой:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}\rangle = \xi_i\, \omega_j^i\, v^j,$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование.

Матрица ω в (1.2) очевидно невырождена: $\det\omega \neq 0$, и подходящей заменой базисов может быть сделана единичной. Соответствующие базисы $\{\boldsymbol{\epsilon}^i\}$ и $\{\boldsymbol{e}_i\}$ в пространствах V^* и V называются двойственными друг другу $\langle \boldsymbol{\epsilon}^i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \delta^i_j$.

Понятие дуального пространства легко распространяется и на тензорные произведения линейных пространств. Например, если пространства V^* и U^* дуальны соответственно к V и U, то дуальным пространством к тензорному произведению $V\otimes U$ будет пространство $U^*\otimes V^*$, причем соответствующая форма задается по правилу

$$\langle \boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{v}\otimes\mathbf{u}\rangle_{V\otimes U} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{v}\rangle_V \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}\rangle_U, \quad \boldsymbol{\zeta}\in V^*,\ \boldsymbol{\xi}\in U^*. \tag{1.3}$$

Рассмотрим теперь линейные отображения векторных пространств. Всевозможные линейные отображения линейного пространства V в пространство U образуют линейное пространство $\mathrm{Hom}(V, U)$. Если же $V = U$, то множество линейных отображений $\mathrm{Hom}(V, V)$ пространства V в себя превращается в ассоциативную алгебру с единицей, в которой произведением операторов считается их последовательное применение. Эта алгебра называется алгеброй эндоморфизмов линейного пространства V и обозначается $\mathrm{End}(V)$.

Зафиксировав в пространстве V некоторый набор базисных векторов $\{\boldsymbol{e}_i\}$, $1 \le i \le \dim V$, мы устанавливаем изоморфизм алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}(V)$ и алгебры квадратных матриц над полем $\mathbb{K}$ размером $\dim V \times \dim V$. Этот изоморфизм определяется действием любого оператора $\hat T \in \mathrm{End}(V)$ на вектора выбранного базиса:

$$\hat T \triangleright \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j T_i^j, \quad \Rightarrow \quad \hat T \mapsto T = \|T_i^j\| \in \mathrm{Mat}(\mathbb{K})_{\dim V}.$$

Здесь значок $\triangleright$ обозначает “действие на объект” и мы будем постоянно им пользоваться в дальнейшем. Напоминаем, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование по всему диапазону допустимых значений.

Важным свойством дуальных конечномерных пространств является изоморфизм

$$\mathrm{End}(V) \cong V\otimes V^*.$$

То есть, любому линейному оператору из $\mathrm{End}(V)$ можно сопоставить вектор тензорного произведения $V\otimes V^*$, и наоборот, любому вектору пространства $V\otimes V^*$ отвечает линейный оператор на V.

Выберем в пространстве $V\otimes V^*$ некоторый вектор вида $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\xi}$. Произвольный вектор из $V\otimes V^*$ представляется линейной комибинацией конечного числа векторов такого типа. Построим по данному вектору линейный оператор на пространстве V. Для этого определим его действие на произвольный вектор $\boldsymbol{u}\in V$ следующей формулой:

$$\forall\,\boldsymbol{u}\in V:\quad (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\xi})\triangleright\boldsymbol{u}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{v}\cdot\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u}\rangle. \tag{1.4}$$

В силу свойств билинейной формы $\langle\ ,\ \rangle$ такое действие задает линейное отображение из V в V и значит определяет некоторый линейный оператор $\hat{\Omega}$.

Если зафиксировать в V и V^* двойственные наборы базисных векторов $\{\boldsymbol{e}_i\}$ и $\{\boldsymbol{\epsilon}^i\}$, то оператор $\hat{\Omega}$ будет задаваться матрицей следующего вида:

$$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\xi}\quad\longleftrightarrow\quad\Omega=\|v^i\xi_j\|,$$

где v^i и ξ_j — координаты векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\xi}$ относительно данных двойственных базисов. Действительно, учитывая (1.4) и определение матрицы оператора, имеем:

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\xi})\triangleright\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{v}\cdot\xi_i=\boldsymbol{e}_j\cdot(v^j\xi_i)=\boldsymbol{e}_j\Omega^j_{\ i}=\hat{\Omega}\triangleright\boldsymbol{e}_i.$$

Единичному (тождественному) оператору на пространстве V соответсвует комбинация $\mathrm{id}_V=\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{\epsilon}^i$.

Обратное соответствие строится столь же просто. По данному оператору $\hat{T}\in\mathrm{End}(V)$ мы находим его матрицу $T=\|T^i_j\|$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}$, а затем определяем соответствующий вектор в $V\otimes V^*$ следующим образом

$$\hat{T}\quad\longleftrightarrow\quad\boldsymbol{e}_i\otimes T^i_j\cdot\boldsymbol{\epsilon}^j\in V\otimes V^*, \tag{1.5}$$

где $\{\boldsymbol{\epsilon}^i\}$ базис в V^*, дуальный базису $\{\boldsymbol{e}_i\}$ в V.

Ассоциативная алгебра с единицей

В данном разделе мы рассмотрим определение одного из основных объектов наших лекций — ассоциативной алгебры с единицей, и переформулируем его на языке коммутативных диаграмм.

Определение. Ассоциативной алгеброй с единицей над полем $\mathbb{K}$ называется линейное $\mathbb{K}$-пространство $\mathcal{A}$, в котором задана бинарная операциия умножения $m:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{array}{lll}
1. & \forall\,a,b,c\in\mathcal{A},\ \forall z\in\mathbb{K}: & m(z\cdot a,b)=m(a,z\cdot b)=z\cdot m(a,b)\\
 & & m(a+b,c)=m(a,c)+m(b,c),\\
 & & m(a,b+c)=m(a,b)+m(a,c);\\
2. & \forall\,a,b,c\in\mathcal{A}: & m(a,m(b,c))=m(m(a,b),c);\\
3. & \exists\,e_{\mathcal{A}}\in\mathcal{A},\ \forall a\in\mathcal{A}: & m(e_{\mathcal{A}},a)=m(a,e_{\mathcal{A}})=a.
\end{array}$$

Здесь $z\cdot a$ обозначает умножение элемента z из числового поля $\mathbb{K}$ на вектор a линейного $\mathbb{K}$-пространства $\mathcal{A}$. Если $\forall a,b\in\mathcal{A}:\ m(a,b)=m(b,a)$, то алгебра называется коммутативной.

Сформулируем теперь это определение в другой, эквивалентной форме, использующей язык теории множеств и отображений между ними. Для получения упомянутой переформулировки проанализируем смысл каждого из пунктов нашего определения.

Первый пункт определения требует, чтобы операция умножения была билинейна по своим аргументам. То есть, отображение m определяется не просто на декартовом произведении $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, а на тензорном произведении $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, и при этом отображении линейная структура тензорного произведения как векторного пространства переходит в линейную структуру пространства $\mathcal{A}$. То есть, операция умножения m есть гомоморфизм векторных пространств $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{m} \mathcal{A}$:

$$(a+b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c \quad \xrightarrow{m} \quad m(a+b, c) = m(a, c) + m(b, c) \in \mathcal{A},$$

$$(z \cdot a) \otimes b = a \otimes (z \cdot b) = z \cdot (a \otimes b) \quad \xrightarrow{m} \quad m(z \cdot a, b) = m(a, z \cdot b) = z \cdot m(a, b) \in \mathcal{A}.$$

Второй пункт определения есть условие ассоциативности. На языке теории множеств оно формулируется так. Возьмем любой элемент из множества $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ (то есть любую упорядоченную тройку элементов a, b, c из $\mathcal{A}$ или линейную комбинацию таких троек) и сначала перемножим две последние компоненты с помощью гомоморфизма $m : \ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. При этом первая компонента тройки остается без изменения, что интерпретируется как применение к ней тождественного отображения id. В результате таких действий мы получим некоторый элемент из $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Затем к этому элементу опять применяем операцию умножения и приходим к результату — элементу из $\mathcal{A}$. Мы будем изображать данную цепочку операций следующей схемой:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes m} \ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ \xrightarrow{m} \ \mathcal{A}.$$

С другой стороны, мы можем начать с перемножения первых двух компонент выбранного элемента из $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, оставляя без изменения третью компоненту. При этом опять получится некий элемент из $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, который умножением отображается в $\mathcal{A}$. Эта последовательность операций изобразится другой схемой:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}} \ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \ \xrightarrow{m} \ \mathcal{A}.$$

Условие ассоциативности означает, что для любой тройки элементов из нашей алгебры эти два способа умножения дают одинаковый результат, то есть две приведенные выше схемы эквивалентны. Математически это формулируется как условие коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes m"'] \arrow[dr, "m \otimes \mathrm{id}"] & \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "m"] & \mathcal{A} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

Диаграмма называется коммутативной, если результат ее обхода[1] не зависит от выбранного пути.

[1] Под обходом диаграммы понимается последовательное выполнение тех операций, которые встречаются на выбранном пути движения по диаграмме.

И, наконец, последний пункт определения постулирует существование единичного элемента $e_{\mathcal{A}}$ и задает его свойства. Наличие в алгебре единичного элемента эквивалентно существованию вложения $\eta : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ числового поля $\mathbb{K}$ в алгебру $\mathcal{A}$:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{K} : \quad \eta(z_1 + z_2) = \eta(z_1) + \eta(z_2), \quad \eta(z_1 z_2) = m(\eta(z_1), \eta(z_2)), \tag{1.6}$$

которое обладает дополнительным свойством:

$$\forall a \in \mathcal{A},\ \forall z \in \mathbb{K} : \quad m(a, \eta(z)) = m(\eta(z), a) = z \cdot a. \tag{1.7}$$

Эквивалентность существования единичного элемента и наличия вложения поля в алгебру доказывается несложно. Действительно, если в алгебре существует единичный элемент $e_{\mathcal{A}}$, то вложение $\eta : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ определяется так

$$\forall z \in \mathbb{K} :\ \eta(z) = z \cdot e_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

Свойства вложения обеспечиваются аксиомами линейного пространства.

И обратно, если есть вложение $\eta : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ со свойством (1.7), то его значение в единице числового поля дает элемент $\eta(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{A}$, который удовлетворяет требованиям третьего пункта нашего определения, то есть является единичным элементом $e_{\mathcal{A}}$:

$$\eta(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{A} : \quad \forall a \in \mathcal{A},\ m(\eta(1_{\mathbb{K}}), a) = m(a, \eta(1_{\mathbb{K}})) = 1_{\mathbb{K}} \cdot a = a \quad \Rightarrow \quad \eta(1_{\mathbb{K}}) \stackrel{\text{def}}{=} e_{\mathcal{A}}.$$

Заметим, что композиция отображений $m \circ (\eta \otimes \mathrm{id})$ (соответственно $m \circ (\mathrm{id} \otimes \eta)$), которая переводит $\mathbb{K} \otimes \mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{A} \otimes \mathbb{K}$ в $\mathcal{A}$), реализует естественный изоморфизм $\mathbb{K} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{A}$), заданный соотношением

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall z \in \mathbb{K}, \quad z \otimes a = 1_{\mathbb{K}} \otimes z \cdot a \longrightarrow z \cdot a.$$

Действительно, в соответствии с (1.7) мы получаем для $\forall a \in \mathcal{A}$, $\forall z \in \mathbb{K}$:

$$z \otimes a \stackrel{\eta \otimes \mathrm{id}}{\longrightarrow} \eta(z) \otimes a \stackrel{m}{\longrightarrow} m(\eta(z), a) = z \cdot a.$$

Сформулируем теперь определение ассоциативной $\mathbb{K}$-алгебры в новых терминах.

Определение 1.2 *Ассоциативной алгеброй* над числовым полем $\mathbb{K}$ называется линейное $\mathbb{K}$-пространство $\mathcal{A}$, для которого определен гомоморфизм m линейных пространств:

$$m :\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

называемый умножением, такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes m"'] \arrow[dr, "m \otimes \mathrm{id}"] & \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "m"] & \mathcal{A} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

Для получения ассоциативной алгебры с единицей постулируется существование еще одного отображения — вложения поля в алгебру.

Определение 1.3 *Ассоциативной алгеброй с единицей* над числовым полем $\mathbb{K}$ называется ассоциативная $\mathbb{K}$-алгебра $\mathcal{A}$, в которой дополнительно к операции умножения определено вложение $\eta:\ \mathbb{K}\to\mathcal{A}$ (единица), такое, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}\otimes\mathbb{K} \cong \mathcal{A} \cong \mathbb{K}\otimes\mathcal{A} \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\eta\otimes\mathrm{id}"] & \\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[r, "m"] & \mathcal{A} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

Условие коммутативности алгебры — $m(a,b)=m(b,a)$ для любой пары элементов a и b — тоже переписывается на языке отображений. Для этого задается отображение перестановки P

$$P:\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\qquad P(a\otimes b)=b\otimes a.$$

Теперь условие коммутативности алгебры $\mathcal{A}$ записывается как условие равенства отображения m и его композиции с перестановкой:

$$m=m\circ P\quad\Leftrightarrow\quad m(a,b)=m(b,a)\ \ \forall\, a,b\in\mathcal{A}.$$

Алгебра Ли и ее универсальная обертывающая алгебра

Алгебры Ли и их универсальные обертывающие алгебры играют большую роль в физических теориях (классической и квантовой механике, квантовой теории поля и т.п.). Разнообразные симметрии физических систем (пространственно-временные и внутренние) описываются элементами групп Ли, а генераторы бесконечно малых преобразований, соответствующих этим симметриям, являются элементами алгебр Ли. Математически алгебра Ли определяется следующим образом.

Определение 1.4 *Алгеброй Ли* над полем $\mathbb{K}$ называется линейное $\mathbb{K}$-пространство $\mathcal{L}$, на котором дополнительно задана билинейная антисимметричная операция — скобка Ли $[\ ,\ ]:$ $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ удовлетворяющая тождеству Якоби

$$\forall\, a,b,c\in\mathcal{L}:\quad [a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0.$$

На практике (для нужд физической теории) важны не сами алгебры Ли, а их представления. Напомним соответствующее определение.

Определение. Представлением алгебры Ли $\mathcal{L}$ в линейном $\mathbb{K}$-пространстве V называется отображение $\hat{T}$, переводящее $\mathcal{L}$ в алгебру линейных операторов $\mathrm{End}(V)$, со следующими свойствами:

1. $\forall\, a_1,a_2\in\mathcal{L}, \forall z_1,z_2\in\mathbb{K}:\qquad \hat{T}(z_1\cdot a_1+z_2\cdot a_2)=z_1\hat{T}(a_1)+z_2\hat{T}(a_2)$
2. $\forall\, a,b\in\mathcal{L}:\qquad \hat{T}([a,b])=\hat{T}(a)\hat{T}(b)-\hat{T}(b)\hat{T}(a).$

Как уже говорилось выше, алгебра линейных операторов $\mathrm{End}(V)$ представляет собой ассоциативную алгебру с единицей (тождественным оператором). Любую ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ можно превратить в алгебру Ли, если определить скобку Ли двух произвольных элементов из $\mathcal{A}$ как их коммутатор. Второй пункт определения представления как раз требует, чтобы скобка Ли двух элементов отображалась в коммутатор их образов. Алгебра Ли, полученная из ассоциативной алгебры $\mathrm{End}(V)$ заданием скобки Ли линейных операторов в виде из коммутатора, обычно обозначается $gl(V)$. Как видно из определения, отображение $\hat{T}$ определяет гомоморфизм алгебр Ли $\mathcal{L}$ и $gl(V)$. Поэтому эквивалентное определение линейного представления формулируется следующим образом.

Определение 1.5 *Представлением алгебры Ли $\mathcal{L}$ в линейном пространстве V называется гомоморфизм $\hat{T}$ алгебр Ли $\hat{T} : \mathcal{L} \to gl(V)$.*

Пространство V с заданным на нем представлением алгебры Ли $\mathcal{L}$ называется $\mathcal{L}$-модулем.

Тот факт, что скобка Ли всегда представляется *коммутатором* линейных операторов не случаен. Он является отражением важной связи алгебр Ли и ассоциативных алгебр с единицей. С произвольной алгебры Ли $\mathcal{L}$ всегда связана некоторая ассоциативная бесконечномерная алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{L})$, которая называется универсальной обертывающей алгеброй данной алгебры Ли $\mathcal{L}$. Основное свойство универсальной обертывающей заключается в том, что любое представление алгебры Ли $\mathcal{L}$ может быть получено из некоторого представления $\mathcal{U}(\mathcal{L})$. Поэтому, если требуется работать только с представлениями алгебры Ли (в большинстве физических задач это так), то можно перейти к ее универсальной обертывающей алгебре и пользоваться ее представлениями.

Универсальная обертывающая любой алгебры Ли обладает еще одним важнейшим для физики свойством — она принадлежит к классу алгебр Хопфа. Структура алгебры Хопфа позволяет строить тензорные произведения представлений алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ (а значит и $\mathcal{L}$), что дает возможность описывать сложную физическую систему как совокупность ее более простых частей. Один из самых известных примеров — правило сложения угловых моментов в квантовой теории (сложение спинов нескольких частиц, или спин-орбитальное взаимодействие в атоме и так далее).

Дадим теперь формальное определение универсальной обертывающей алгебры [H].

Определение 1.6 *Универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathcal{L}$* называется ассоциативная алгебра с единицей $\mathcal{U}(\mathcal{L})$, для которой выполнены следующие требования:

1. Существует линейное отображение $\rho : \ \mathcal{L} \to \mathcal{U}(\mathcal{L})$.
2. $\forall\, a, b \in \mathcal{L} : \ \rho([a, b]) = \rho(a)\rho(b) - \rho(b)\rho(a)$.
3. Алгебра $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ порождается своим единичным элементом $e_{\mathcal{U}}$ и подмножеством $\rho(\mathcal{L})$.
4. Если задан некоторый гомоморфизм ϕ, отображающий $\mathcal{L}$ в произвольную ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ с единицей и удовлетворяющий требованию пункта 2, то есть

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\phi} \mathcal{A} : \quad \phi([a, b]) = \phi(a)\phi(b) - \phi(b)\phi(a),$$

то всегда можно построить гомоморфизм ассоциативных алгебр с единицей $\psi : \mathcal{U}(\mathcal{L}) \to \mathcal{A}$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \mathcal{A} \\ & \mathcal{U}(\mathcal{L}) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

то есть, гомоморфизм ϕ представим в виде композиции отображений

$$\phi = \psi \circ \rho.$$

Можно показать, что данным определением универсальная обертывающая алгебра определяется единственным образом с точностью до изоморфизма.

Давайте теперь подробно остановимся на пунктах этого определения и уясним себе их смысл.

Линейное отображение ρ, существование которого требует первый пункт определения, переводит алгебру Ли $\mathcal{L}$ в некоторое подмножество $\rho(\mathcal{L}) \subset \mathcal{U}(\mathcal{L})$ универсальной обертывающей алгебры. В силу условия из второго пункта и линейности ρ это подмножество является подалгеброй Ли[2] в $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ — гомоморфным образом исходной алгебры Ли $\mathcal{L}$. Легко видеть, что первые два пункта определения универсальной обертывающей алгебры выполнены для любого линейного представления алгебры $\mathcal{L}$ (с заменой $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ на ассоциативную алгебру $\mathrm{End}(V)$).

Третий пункт означает, что составляя всевозможные *конечные* произведения элементов из $\rho(\mathcal{L})$ и беря *конечные* линейные комбинации этих произведений с дополнительным единичным элементом $e_{\mathcal{U}}$, мы можем получить любой элемент универсальной обертывающей. И поскольку сама $\mathcal{L}$ является линейной оболочкой произвольных фиксированных базисных элементов e_i, мы заключаем, что вся универсальная обертывающая алгебра порождается набором элементов $\rho(e_i)$ — образами базисных элементов алгебры Ли e_i относительно отображения ρ и дополнительным единичным элементом $e_{\mathcal{U}}$, который независим от $\rho(e_i)$.

И, наконец, четвертый пункт определения, наиболее существенный с практической точки зрения, приводит к тому, что любое представление $\mathcal{L}$ может быть получено из некоторого представления $\mathcal{U}(\mathcal{L})$. Действительно, в четвертом пункте говорится о гомоморфизмах алгебры Ли $\mathcal{L}$ в произвольную ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$. В частности, в качестве такой алгебры может быть взята $\mathrm{End}(V)$ — алгебра линейных операторов в некотором векторном пространстве V. Но тогда гомоморфизм ϕ, о котором идет речь в определении, будет реализовывать представление $\mathcal{L}$ в V. Согласно определению мы можем перейти от $\mathcal{L}$ к $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ с помощью гомоморфизма ρ, а затем обязательно найдется такое представление ψ универсальной обертывающей алгебры в том же самом пространстве V, которое будет совпадать с представлением ϕ на элементах алгебры $\mathcal{L}$.

Приведенное выше замечание о множестве $\{\rho(e_i)\}$ образов базисных векторов, порождающем универсальную обертывающую алгебру, дает практический способ ее построения. Именно это построение мы использовали в предыдущих лекциях, когда рассматривали квантование скобки Пуассона-Ли на матричной алгебре.

Итак, фиксируем в данной алгебре Ли $\mathcal{L}$ базисный набор векторов[3] $\{e_i\}$, $1 \le i \le \dim \mathcal{L}$, $\mathcal{L} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\{e_i\})$ (для простоты формулировок мы рассматриваем конечномерный случай) и находим структурные константы относительно этого базиса:

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^{\,k} e_k.$$

Затем мы строим свободную тензорную алгебру $\mathsf{T}(\mathcal{L})$ линейного пространства $\mathcal{L}$ и берем фактор этой ассоциативной алгебры по двустороннему идеалу $\langle J \rangle$, порожденному подмножеством $J \subset \mathsf{T}(\mathcal{L})$ элементов тензорной алгебры:

$$J = \{e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i - C_{ij}^{\,k} e_k \,|\, 1 \le i < j \le \dim \mathcal{L}\}.$$

[2] Строго говоря, универсальная обертывающая $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ изначально не является алгеброй Ли и поэтому не может иметь подалгебр Ли. Однако, как уже объяснялось выше, в $\mathcal{U}(\mathcal{L})$, как и во всякой ассоциативной алгебре, может быть введена структура алгебры Ли через коммутатор ее элементов.

[3] Наша конструкция, таким образом, будет зависеть от выбора базиса в алгебре Ли, но поскольку различные базисы связаны обратимыми линейными преобразованиями, то другой выбор исходного базиса приведет к изоморфной конструкции универсальной обертывающей алгебры.

По определению, идеал $\langle J\rangle$ состоит из *всех* элементов $u_{ij} \in \mathsf{T}(\mathcal{L})$, имеющих следующий общий вид:

$$u_{ij} = X \otimes (e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i - C_{ij}^{\,k} e_k) \otimes Y, \quad \forall\, X, Y \in \mathsf{T}(\mathcal{L}),\ 1 \le i, j \le N.$$

Упомянутый фактор тензорной алгебы $\mathsf{T}(\mathcal{L})$ по идеалу $\langle J\rangle$ и будет универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{U}(\mathcal{L}) = \mathsf{T}(\mathcal{L})/\langle J\rangle.$$

2 Биалгебры и алгебры Хопфа

Алгебры Хопфа (см., например, [Ба, А]) являются представителями более широкого класса биалгебр. Биалгебра — это ассоциативная алгебра с единицей, в которой помимо умножения и единицы определены две дополнительные операции — коумножение и коединица. Биалгебра становится алгеброй Хопфа, если в ней возможно определить третью дополнительную операцию — так называемый антипод. В данном разделе мы подробно разберем опрелеление этих операций, а также рассмотрим наиболее важные для нас примеры алгебр Хопфа.

Коумножение и коединица

Для того, чтобы лучше понять смысл и функции упомянутых в подзаголовке операций, рассмотрим вопрос о тензорном произведении модулей над ассоциативной алгеброй (то есть, пространств с заданным представлением этой алгебры).

Предположим, что задана ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ с единицей и есть два ее представления в конечномерных векторных пространствах V_1 и V_2. Обозначим соответствующие отображения алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathrm{End}(V_1)$ и $\mathrm{End}(V_2)$ символами $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ соответственно:

$$\hat{T}_i : \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \hat{T}_i(a) \in \mathrm{End}(V_i).$$

Рассмотрим теперь тензорное произведение $W = V_1 \otimes V_2$ и зададимся вопросом, можно ли построить представление $\mathcal{A}$ в пространстве W и как оно будет связно с $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$? Вообще говоря, для произвольной алгебры $\mathcal{A}$ ответ неизвестен и нахождение структуры $\mathcal{A}$-модуля на тензорном произведении двух $\mathcal{A}$-модулей очень нетривиальная задача. Отметим, однако, что в пространстве W относительно элементарно строится представление тензорного произведения двух копий алгебры $\mathcal{A}$. Согласно определению, тензорное произведение ассоциативных алгебр с единицей $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ есть ассоциативная алгебра, которая как векторное пространство совпадает с тензорным произведением векторных пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, операция умножения задается соотношением $(a_1 \otimes b_1) * (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$, и единичный элемент дается произведением единичных элементов алгебр-сомножителей: $e_{\mathcal{A}} \otimes e_{\mathcal{B}}$. Учитывая это определение, легко проверить, что отображение $\hat{Q}$ из тензорного квадрата алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathrm{End}(W)$

$$\hat{Q}(a \otimes b) = \hat{T}_1(a) \otimes \hat{T}_2(b), \quad \forall a \otimes b \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} : . \tag{2.1}$$

задает представление $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ в $W = V_1 \otimes V_2$.

Замечание. Отметим, что здесь мы рассматриваем простейший случай ассоциативной алгебры, впрочем, достаточно общий. Но, вообще говоря, структура ассоциативной алгебры на тензорном квадрате не всегда может быть введена простым способом, описанным выше: $(a_1 \otimes b_1) * (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$. Тонкий момент заключается в следующем. Фактически, приведенное умножение есть отображений из *четвертой* тензорной степени алгебры $\mathcal{A}$ в тензорный квадрат, которое состоит из композиции следующих операций:

$$a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2 \xrightarrow{P_{23}} a_1 \otimes a_2 \otimes b_1 \otimes b_2 \xrightarrow{m \otimes m} m(a_1, a_2) \otimes m(b_1, b_2),$$

где символ $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ обозначает умножение в $\mathcal{A}$ (выше обозначавшееся точкой для простоты). Здесь P_{23} — обычная перестановка $P_{23} \triangleright a_2 \otimes b_1 = b_1 \otimes a_2$. То есть, элементы a_2 и b_1 из разных компонент тензорного произведения $\mathcal{A}$ переставляются, “не замечая” друг друга, а потом перемножаются с соответствующими элементами нашей конструкции.

Однако, существуют, например, так называемые суперaлгебры (ассоциативные алгебры с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой), элементы которых переставляются по правилу

$$P_{super} \triangleright a \otimes b = (-1)^{\bar{a}\bar{b}} b \otimes a, \tag{2.2}$$

где $\bar{a}$ обозначает градуировку элемента a (градуировка $\bar{a}$ равна $\bar{0}$ или $\bar{1}$ из кольца вычетов по модулю 2). Для тензорного квадрата суперaлгебры перестановка P_{23} из приведенной выше цепочки отображений должна быть заменена на суперперестановку (2.2). Поэтому алгебраическая структура на тензорном квадрате суперaлгебры усложняется:

$$(a_1 \otimes b_1) * (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{\bar{b}_1 \bar{a}_2} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2).$$

Эта же тонкость переносится на теорию представлений суперaлгебры в суперпространствах, где надо учитывать не только градуировку элементов алгебры, но и градуировку векторов пространства представления.

В случае алгебры уравнения отражений (алгебра, полученная квантованием скобки Семенова Тянь-Шанского) ситуация еще более сложная: при опеделении умножения элементов тензорного квадрата алгебры уравнения отражений перестановку P_{23} необходимо заменять на более сложные отображения.

Предположим теперь, что у нас имеется некоторое линейное отображение Δ алгебры $\mathcal{A}$ в произведение $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$

$$\forall a \in \mathcal{A} : \quad \Delta(a) = \sum_i a_i' \otimes a_i'' \equiv a_{(1)} \otimes a_{(2)}, \quad a_i', a_i'' \in \mathcal{A}. \tag{2.3}$$

В последнем равенстве мы ввели новые, очень удобные обозначения для суммы элементов тензорного произведения. Данные обозначения широко применяются в теории алгебр Хопфа и квантовых групп (так называемые обозначения Свидлера — Sweedler’s notation).

Если взять композицию отображений $\hat{Q} \circ \Delta$, то каждому элементу алгебры $\mathcal{A}$ мы поставим в соответствие линейный оператор, действующий в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$:

$$\forall a \in \mathcal{A} : \qquad (\hat{Q} \circ \Delta)(a) = \hat{Q}(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) = \hat{T}_1(a_{(1)}) \otimes \hat{T}_2(a_{(2)}).$$

Для того, чтобы такая композиция отображений задавала представление алгебры $\mathcal{A}$, отображение Δ помимо линейности должно удовлетворять еще нескольким свойствам. В частности, любое представление есть гомоморфизм алгебр, следовательно отображение Δ также должно быть *гомоморфизмом* алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} : \quad \Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b). \tag{2.4}$$

Кроме того, единичный элемент алгебры должен представляться тождественным оператором в пространстве представления, следовательно

$$\Delta(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{A}} \otimes e_{\mathcal{A}}.$$

Рассмотрим далее три представления нашей алгебры в пространствах V_1, V_2 и V_3. В тензорном произведении этих трех пространств мы тоже можем построить представление алгебры $\mathcal{A}$. Для этого необходимо отобразить алгебру $\mathcal{A}$ в произведение трех ее копий $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Пользуясь гомоморфизмом Δ этой цели можно достичь двумя путями. Сначала применением Δ переходим от $\mathcal{A}$ к $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, а затем еще раз применяем Δ к первому сомножителю в произведении $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ и не трогаем второй (операция $\Delta \otimes \mathrm{id}$). Или применяем Δ ко второму сомножителю, не меняя первый (операция $\mathrm{id} \otimes \Delta$). На первом пути мы сначала строим представление в произведении $V_1 \otimes V_2$, а потом результат перемножаем с представлением в V_3. Второй путь подразумевает построение представления в $V_2 \otimes V_3$, а затем умножение на представление в пространстве V_1. Но поскольку тензорное произведение векторных пространств ассоциативно

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3),$$

то естественно потребовать, чтобы описанные выше способы построения представления в тензорном произведении трех пространств давали бы один и тот же результат. Это приводит к требованию *коассоциативности* гомоморфизма Δ

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta. \tag{2.5}$$

Отображение Δ в теории биалгебр называется коумножением. Такое название основано на том, что коумножение Δ действует в обратном направлении по сравнению с операцией умножения m: умножение отображает $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$, а коумножение выполняет прямо противоположное действие. Требование коассоциативности Δ на языке коммутативных диаграмм получается из диаграммы, выражающей ассоциативность умножения m, заменой всех стрелок на противоположные и подстановкой операции коумножения Δ вместо умножения m.

Другой элемент биалгебры — коединица ε — появляется из необходимости строить одномерные представления. В результате коединица — это гомомоморфизм из $\mathcal{A}$ в числовое поле $\mathbb{K}$ (противоположно вложению, осуществляемому единицей η):

$$\forall\, a, b \in \mathcal{A}: \quad \varepsilon(a) \in \mathbb{K}, \quad \varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b). \tag{2.6}$$

Взаимосвязь коединицы и коумножения выражаются следующей формулой:

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}. \tag{2.7}$$

Участвующие в этой формуле композиции отображений переводят $\mathcal{A}$ в $\mathbb{K} \otimes \mathcal{A}$ или в $\mathcal{A} \otimes \mathbb{K}$, что, в свою очередь, изоморфно $\mathcal{A}$. Соотношение (2.7) требует, чтобы данные композиции были просто тождественными отображениями с учетом этого изоморфизма, то есть произвольный элемент $a \in \mathcal{A}$ должен отображаться в $1_{\mathbb{K}} \otimes a$ (или в $a \otimes 1_{\mathbb{K}}$), что отождествляется с a.

Поясним смысл такого требования на примере представлений алгебры $\mathcal{A}$. Пусть задано представление $\hat{T}$ алгебры $\mathcal{A}$ в линейном пространстве V:

$$\forall a \in \mathcal{A}: \quad \hat{T}(a) \in \mathrm{End}(V).$$

Что получится, если мы применим к произвольному элементу a из нашей алгебры композицию отображений $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$? Мы получаем

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta : \qquad a \mapsto a_{(1)} \otimes a_{(2)} \mapsto \varepsilon(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = 1_{\mathbb{K}} \otimes \varepsilon(a_{(1)}) \cdot a_{(2)} \in 1_{\mathbb{K}} \otimes \mathcal{A}.$$

Последнее равенство справедливо на том основании, что $\varepsilon(a_{(1)})$ есть число из поля $\mathbb{K}$, а в соответствии с определением тензорного произведения линейных пространств $\forall z \in \mathbb{K}$: $(z \cdot a) \otimes b = a \otimes (z \cdot b)$ для любых a и b.

Таким образом, любому элементу a из алгебры $\mathcal{A}$ мы можем сопоставить три линейных оператора в пространстве представления V — это операторы $\hat{T}(a)$, $\hat{T}(\varepsilon(a_{(1)}) \cdot a_{(2)})$ и $\hat{T}(\varepsilon(a_{(2)}) \cdot a_{(1)})$. Поскольку коединица ε есть по определению гомоморфизм, то каждый из этих операторов определяет представление $\mathcal{A}$ в пространстве V. Согласно формуле (2.7)

$$a = \varepsilon(a_{(1)}) \cdot a_{(2)} = \varepsilon(a_{(2)}) \cdot a_{(1)},$$

и следовательно все три вышеупомянутых линейных оператора просто совпадают (задают одно и то же представление алгебры $\mathcal{A}$).

Абстрагируясь от представлений алгебры $\mathcal{A}$ и объединяя соотношения (2.4) – (2.7), получаем следующее определение.

Определение 2.1 *Биалгеброй* над числовым полем $\mathbb{K}$ называется ассоциативная $\mathbb{K}$-алгебра $\mathcal{A}$, в которой помимо операции умножения и единицы дополнительно заданы два отображения — коумножение Δ

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} : \quad \Delta(a) = \sum_i a'_i \otimes a''_i \equiv a_{(1)} \otimes a_{(2)}$$

и коединица $\varepsilon : \ \mathcal{A} \to \mathbb{K}$, которые обладают следующими свойствами:

1. Коумножение и коединица являются гомоморфизмами алгебр с единицей, то есть

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathcal{A} : \qquad & \Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(a), \qquad && \varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b), \\ & \Delta(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{A}} \otimes e_{\mathcal{A}}, && \varepsilon(e_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

2. Коумножение коассоциативно (2.5), что эквивалентно коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & & \\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[urr, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & & \mathcal{A} \arrow[ll, "\Delta"'] \arrow[rr, "\Delta"] & & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[ull, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

3. Для произвольного элемента $a \in \mathcal{A}$ выполнено соотношение

$$\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(a_{(1)}) \cdot a_{(2)} = \varepsilon(a_{(2)}) \cdot a_{(1)} = a, \tag{2.8}$$

что эквивалентно коммутативности следующей диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}\otimes\mathbb{K} \;\cong\; \mathcal{A} \;\cong\; \mathbb{K}\otimes\mathcal{A} & \\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & \mathcal{A} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[u, equal, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[ul, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

Подчеркнем, что в третьем пункте определения символы $a_{(1)}$ и $a_{(2)}$ не обязательно обозначают именно *два* элемента алгебры $\mathcal{A}$, за компактными обозначениями Свидлера скрыто, вообще говоря, *суммирование* по элементам алгебры, то есть

$$\varepsilon(a_{(1)})\cdot a_{(2)} = a \quad\Leftrightarrow\quad \sum_i \varepsilon(a'_i)\cdot a''_i = a.$$

Ну и еще один раз отметим, что диаграммы, определяющие свойства коумножения и коединицы, только направлением стрелок отличаются от диаграмм, определяющих свойства умножения и единицы в ассоциативной алгебре (см. определения 1.2 и 1.3).

Антипод

Алгебра Хопфа представляет собой биалгебру, в которой дополнительно определено еще одно отображение — так называемый *антипод.* Для иллюстрации смысла этого отображения давайте опять рассмотрим наш пример о построении представлений ассоциативной алгебры.

Пусть нам задано представление некоторой ассоциативной алгебры $\hat{T}:\mathcal{A}\to \mathrm{End}(V)$. Можем ли мы по этому представлению построить представление $\hat{T}^*$ в дуальном пространстве V^*? Оказывается, для этого необходимо иметь некоторое линейное отображение алгебры $\mathcal{A}$ в себя, обладающее свойством *антигомоморфности*:

$$\mathcal{A}\xrightarrow{S}\mathcal{A}:\quad S(ab)=S(b)S(a)\quad \forall\, a,b\in\mathcal{A}. \tag{2.9}$$

Здесь для краткости произведение элементов алгебры записано в виде ab вместо $m(a,b)$. То есть отображение S меняет порядок следования сомножителей. Пример такого антигомоморфного линейного отображения — эрмитово сопряжение (или транспонирование) матриц.

Если такое отображение имеется, то по заданному представлению $\hat{T}:\mathcal{A}\to\mathrm{End}(V)$ представление $\hat{T}^*$ в дуальном пространстве V^* строится так:

$$\forall\, a\in\mathcal{A},\,\forall\,\xi\in V^*:\quad \hat{T}^*(a)\triangleright\xi=\xi',\quad \langle\xi',v\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle\xi,\hat{T}(S(a))\triangleright v\rangle,\ \forall\, v\in V$$

То есть, оператор $\hat{T}^*(a)$ действуя на произвольный линейный функционал ξ (вектор пространства V^*) переводит его в другой функционал ξ', значение которого на произвольном векторе $v\in V$ дано в последнем равенстве.

Запишем это определение в более симметричной форме:

$$\langle\hat{T}^*(a)\triangleright\xi,v\rangle=\langle\xi,\hat{T}(S(a))\triangleright v\rangle. \tag{2.10}$$

Отображение S в правой части гарантирует свойство гомоморфности представления $\hat{T}^*$, то есть обеспечивает выполнение равенства

$$\hat{T}^*(ab)=\hat{T}^*(a)\hat{T}^*(b)\quad\forall\, a,b\in\mathcal{A}.$$

Доказательство несложно:

$$\begin{aligned}\langle \hat{T}^*(a)\hat{T}^*(b) \triangleright \xi, v\rangle &= \langle \hat{T}^*(b) \triangleright \xi, \hat{T}(S(a)) \triangleright v\rangle = \langle \xi, \hat{T}(S(b))\hat{T}(S(a)) \triangleright v\rangle = \\ & \langle \xi, \hat{T}(S(b)S(a)) \triangleright v\rangle \stackrel{(2.9)}{=} \langle \xi, \hat{T}(S(ab)) \triangleright v\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \hat{T}^*(ab) \triangleright \xi, v\rangle\end{aligned}$$

Если $\mathcal{A}$ является биалгеброй с отображением антипода S (то есть, алгеброй Хопфа), то ее представления обладают следующим важным свойством: любое представление $\hat{T}$ в линейном пространстве V порождает представление алгебры $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathrm{End}(V)$. Этот факт хорошо известен в теории представлений групп и алгебр Ли. Действительно, пусть G произвольная группа (не обязательно группа Ли), а $\mathcal{L}$ некоторая алгебра Ли. Если $\hat{D} : G \to \mathrm{End}(V)$ и $\hat{T} : \mathcal{L} \to \mathrm{End}(V)$ есть их представления в линейном пространстве V, то отображения вида

$$\hat{F} \mapsto \hat{D}(g)\hat{F}\hat{D}^{-1}(g) \quad \text{и} \quad \hat{F} \mapsto [\hat{T}(a), \hat{F}], \quad g \in G,\ a \in \mathcal{L},\ \hat{F} \in \mathrm{End}(V) \tag{2.11}$$

являются представлениями G и $\mathcal{L}$ в пространстве $\mathrm{End}(V)$. Групповая алгебра, отвечающая группе G (любое линейное представление группы является и представлением ее групповой алгебры), а также универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли представляют собой примеры алгебр Хопфа, поэтому приведенные выше представления есть частный случай общей формулы, которую мы сейчас получим.

Итак, пусть есть представление $\hat{T}$ алгебры Хопфа $\mathcal{A}$ в линейном пространстве V. Воспользуемся тем, что $\mathrm{End}(V)$ изоморфно тензорному произведению $V \otimes V^*$. Вследствие этого изоморфизма мы можем свести задачу построения представления алгебры $\mathcal{A}$ на пространстве линейных операторов $\mathrm{End}(V)$ к построению представления $\mathcal{A}$ на пространстве $V \otimes V^*$. А эта последняя задача легко решается, так как у нас есть представления $\hat{T}$ и $\hat{T}^*$ в V и V^* соответственно, и есть операция коумножения Δ, которая позволяет строить тензорные произведения представлентий.

Таким образом, рецепт следующий. Имея представление $\hat{T} : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V)$, строим представление $\hat{T}^* : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(V^*)$, а затем с помощью коумножения Δ получаем представление $\mathcal{A}$ в пространстве $V \otimes V^*$:

$$\forall\, a \in \mathcal{A} : \quad a \xrightarrow{\Delta} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \longrightarrow \hat{T}(a_{(1)}) \otimes \hat{T}^*(a_{(2)}) \in \mathrm{End}(V \otimes V^*).$$

Пользуясь формулой (1.5), дающей явный вид изоморфизма линейных операторов на V и векторов из $V \otimes V^*$, а также определением (2.10), мы получаем следующий явный вид представления алгебры Хопфа $\mathcal{A}$ на пространстве $\mathrm{End}(V)$ (обозначим это представление Q):

$$\forall\, a \in \mathcal{A},\ \hat{F} \in \mathrm{End}(V) : \quad \mathsf{Q}(a) \triangleright \hat{F} = \hat{T}(a_{(1)})\hat{F}\,\hat{T}(S(a_{(2)})). \tag{2.12}$$

Линейность оператора $\mathsf{Q}(a)$ очевидна из определения, а основные свойства представления

$$\mathsf{Q}(z \cdot a + z' \cdot a') = z \cdot \mathsf{Q}(a) + z' \cdot \mathsf{Q}(a'), \quad \mathsf{Q}(ab) = \mathsf{Q}(a)\mathsf{Q}(b) \tag{2.13}$$

прямо следуют из свойств Δ, ε и S. В следующем разделе мы рассмотрим конкретные примеры алгебр Хопфа и покажем, как представления (2.11) получаются из общей формулы (2.12).

До сих пор от отображения антипода S мы требовали только антигомоморфности (2.9). Однако на S налагается еще одно ограничение, которое определяет его связи с коумножением Δ и коединицей ε. Смысл этого ограничения (по крайней мере для теории представлений) можно проиллюстрировать на примере формулы (2.12).

Рассмотрим тождественный оператор $\hat{\mathbf{I}}$ в пространстве V и порождаемое им одномерное подпространство в $\mathrm{End}(V)$. Для этого случая формула (2.12) принимает вид

$$\mathsf{Q}(a) \triangleright \hat{\mathbf{I}} = \hat{T}(a_{(1)})\hat{T}(S(a_{(2)})) = \hat{T}(a_{(1)}S(a_{(2)})).$$

Естественно потребовать, чтобы одномерное подпространство, порожденное тождественным оператором в $\mathrm{End}(V)$, было инвариантным относительно представления Q (как это и происходит в частных случаях, представленных в (2.11)). То есть мы требуем, чтобы действие $\mathsf{Q}(a)$ на $\hat{\mathbf{I}}$ приводило бы лишь к появлению числового множителя, зависящего от конкретного $a \in \mathcal{A}$:

$$\mathsf{Q}(a) \triangleright \hat{\mathbf{I}} = \lambda(a)\hat{\mathbf{I}},$$

или, учитывая предыдущую формулу и тот факт, что тождественный оператор является представлением единичного элемента алгебры, получаем

$$\hat{T}(a_{(1)}S(a_{(2)})) = \lambda(a)\hat{T}(e_{\mathcal{A}}).$$

При этом очевидно, что в силу (2.13) функция $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ реализует одномерное представление алгебры $\mathcal{A}$. Такая функция у нас уже есть — это отображение коединицы ε. Поэтому дополнительное ограничение, налагаемое на отображение антипода, на уровне алгебры выглядит следующим образом

$$a_{(1)}S(a_{(2)}) = \varepsilon(a)e_{\mathcal{A}}.$$

Аналогичные рассуждения, проведенные для случая правых дуальных пространств, приводят к соотношению

$$S(a_{(1)})a_{(2)} = \varepsilon(a)e_{\mathcal{A}}.$$

На языке отображений эти два соотношения переписываются в виде равенства следующих композиций

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta. \tag{2.14}$$

Напомним, что m и η обозначают умножение и единицу алгебры $\mathcal{A}$.

И, наконец, отметим, что свойство антигомоморфности отображения антипода приводит к следующим равенствам, которые показывают, как связаны коумножение и коединица от элемента $S(a)$ с этими же операциями от самого элемента a:

$$\Delta \circ S = P_{12} \circ (S \otimes S) \circ \Delta, \qquad \varepsilon \circ S = \varepsilon.$$

Дадим теперь полное определение алгебры Хопфа.

Определение 2.2 *Алгеброй Хопфа* над полем $\mathbb{K}$ называется биалгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K}$, в которой в дополнение к операциям умножения m, коумножения Δ, гомоморфизмов единицы η и коединицы ε задан антигоморфизм $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, называемый антиподом, такой, что выполнены соотношения (2.14), то есть следующая диаграмма является коммутативной

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes S"'] & \mathcal{A} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dd, "S \otimes \mathrm{id}"] \\
 & \mathbb{K} \arrow[d, "\eta"] & \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "m"] & \mathcal{A} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

Дуальные алгебры Хопфа

В заключение данного раздела рассмотрим еще один объект — так называемую *дуальную алгебру Хопфа.* Каждая ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ является по определению линейным пространством, снабженным дополнительной операцией перемножения векторов. Если мы рассмотрим дуальное линейное пространство $\mathcal{A}^*$, то для произвольной алгебры $\mathcal{A}$ в этом дуальном пространстве вообще говоря нельзя ввести операцию умножения векторов (линейных функционалов на $\mathcal{A}$), которая превратила бы линейное пространство $\mathcal{A}^*$ в ассоциативную алгебру. Основная трудность состоит в обеспечении *линейности* функционала-произведения, так как операция умножения элементов алгебры должна давать элемент того же пространства, к которому принадлежат сомножители.

Если же исходная алгебра $\mathcal{A}$ является алгеброй Хопфа, то дуальное к ней пространство тоже превращается в алгебру Хопфа. Для этого необходимо задать операции умножения и коумножения линейных функционалов, указать функционалы единицы и коединицы, а также дуальный антипод. Приведем соответствующее конструктивное определение.

Определение 2.3 Алгеброй Хопфа, дуальной к $\mathbb{K}$-алгебре Хопфа $\mathcal{A}$ с операциями m, η, Δ, ε и S, называется линейное $\mathbb{K}$-пространство $\mathcal{A}^*$ со следующими свойствами:

1. $\mathcal{A}^*$ есть дуальное пространство к $\mathcal{A}$, то есть задана невырожденная билинейная форма $\langle\, ,\, \rangle : \; A^* \otimes A \to \mathbb{K}$.

2. В пространстве $\mathcal{A}^*$ определены операции умножения m^* и коумножения Δ^* в соответствии с формулами

$$\forall\, \xi, \zeta \in \mathcal{A}^*,\ \forall\, a \in \mathcal{A} : \qquad \langle m^*(\xi, \zeta), a\rangle = \langle \xi \otimes \zeta, \Delta(a)\rangle, \tag{2.15}$$

$$\forall\, \xi \in \mathcal{A}^*,\ \forall\, a, b \in \mathcal{A} : \qquad \langle \Delta^*(\xi), a \otimes b\rangle = \langle \xi, m(a, b)\rangle. \tag{2.16}$$

3. В пространстве $\mathcal{A}^*$ определены единица $e^*_{\mathcal{A}}$ и коединица ε^* в соответствии с формулами

$$\forall\, a \in \mathcal{A} : \quad \langle e^*_{\mathcal{A}}, a\rangle = \varepsilon(a), \quad e^*_{\mathcal{A}} = \eta^*(1_{\mathbb{K}}), \tag{2.17}$$

$$\forall\, \xi \in \mathcal{A}^* : \quad \varepsilon^*(\xi) = \langle \xi, e_{\mathcal{A}}\rangle, \quad e_{\mathcal{A}} = \eta(1_{\mathbb{K}}). \tag{2.18}$$

4. В пространстве $\mathcal{A}^*$ задано отображение антипода S^* в соответствии с формулой

$$\forall\, \xi \in \mathcal{A}^*, \forall\, a \in \mathcal{A} : \quad \langle S^*(\xi), a\rangle = \langle \xi, S(a)\rangle. \tag{2.19}$$

Приведенное выше конструктивное определение нуждается в проверке корректности, поскольку все введенные операции связаны различными дополнительными соотношениями, например, такими как (2.5), (2.7) и (2.14) для коалгебраических структур. Мы не будем проводить эту проверку в полном объеме, но читателю настоятельно рекомендуется это сделать, чтобы освоится с определениями операций алгебры Хопфа и получить некоторый опыт в работе с ними. Мы же для примера ограничимся рассмотрением операции умножения m^* и единицы $e^*_{\mathcal{A}}$.

Прежде всего необходимо убедиться, что операция, определенная в (2.15), осуществляет отображение из $\mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^*$ в $\mathcal{A}^*$, то есть любой паре линейных функционалов из $\mathcal{A}^*$ отображение m^* ставит в соответствие некоторый *линейный* функционал на $\mathcal{A}$. Затем нужно проверить, что выполняются дистрибутивные законы умножения (то есть, $m^* : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$) и, наконец, нужно проверить ассоциативность операции умножения m^*.

Выберем два произвольных линейных функционала ξ_1 и ξ_2 из $\mathcal{A}^*$ и рассмотрим функционал $m^*(\xi_1, \xi_2)$, действие которого на векторы алгебры $\mathcal{A}$ опреляется соотношением (2.15). Линейность данного функционала немедленно следует из линейности гомоморфизма коумножения Δ. Действительно, мы должны показать, что для произвольной пары чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{K}$ и любой пары векторов $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ выполнено следующее равенство:

$$m^*(\xi_1, \xi_2)(z_1 \cdot a_1 + z_2 \cdot a_2) = z_1 m^*(\xi_1, \xi_2)(a_1) + z_2 m^*(\xi_1, \xi_2)(a_2).$$

Однако в силу определения (2.15) это сводится к свойству линейности коумножения

$$\Delta(z_1 \cdot a_1 + z_2 \cdot a_2) = z_1 \cdot \Delta(a_1) + z_2 \cdot \Delta(a_2),$$

которое выполнено по определению Δ. Дистрибутивность закона умножения линейных функционалов

$$m^*(\xi_1, \xi_2 + \xi_3) = m^*(\xi_1, \xi_2) + m^*(\xi_1, \xi_3)$$

есть следствие билинейности формы $\langle \, , \rangle$, заданной на тензорном произведении дуальных пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

Свойство ассоциативности произведения m^* обеспечивается коассоциативностью операции Δ (см. (2.5))

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta.$$

Чтобы не загромождать выкладки, примем временно сокращенное обозначение для умножения функционалов

$$m^*(\xi, \zeta) \equiv \xi \star \zeta.$$

Ассоциативность произведения по определению означает следующее равенство

$$\xi_1 \star (\xi_2 \star \xi_3) = (\xi_1 \star \xi_2) \star \xi_3.$$

Рассмотрим значение правой и левой частей этого предполагаемого равенства на произвольном векторе a алгебры $\mathcal{A}$. Пользуясь определениями (2.15) и (2.3), получаем следующую цепочку тождественных преобразований

$$\begin{aligned}\langle \xi_1 \star (\xi_2 \star \xi_3), a \rangle \; &= \; \langle \xi_1 \otimes (\xi_2 \star \xi_3), \Delta(a) \rangle = \langle \xi_1, a_{(1)} \rangle \langle \xi_2 \star \xi_3, a_{(2)} \rangle = \\ &\langle \xi_1, a_{(1)} \rangle \langle \xi_2 \otimes \xi_3, \Delta(a_{(2)}) \rangle = \langle \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \xi_3, (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(a) \rangle.\end{aligned}$$

Для второго варианта перемножения функционалов совершенно аналогично получаем

$$\langle (\xi_1 \star \xi_2) \star \xi_3, a \rangle = \langle \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \xi_3, (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(a) \rangle.$$

Теперь очевидно, что требуемое свойство ассоциативности умножения (2.15) есть прямое следствие коассоциативности Δ.

В качестве второго примера проверим, что функционал $e^*_{\mathcal{A}}$, заданный соотношением (2.17) действительно задает единицу в алгебре $\mathcal{A}^*$ относительно умножения m^*. Для этого надо проверить, что для любого линейного функционала ξ из $\mathcal{A}^*$ выполнено свойство

$$m^*(e^*_{\mathcal{A}}, \xi) = m^*(\xi, e^*_{\mathcal{A}}) = \xi.$$

Фиксируем произвольный вектор $a \in \mathcal{A}$ и, пользуясь приведенными выше определениями и свойствами коструктур, получаем

$$\langle m^*(e^*_{\mathcal{A}}, \xi), a \rangle \overset{(2.15)}{=} \langle e^*_{\mathcal{A}}, a_{(1)} \rangle \langle \xi, a_{(2)} \rangle \overset{(2.17)}{=} \varepsilon(a_{(1)}) \, \langle \xi, a_{(2)} \rangle = \langle \xi, \varepsilon(a_{(1)}) \cdot a_{(2)} \rangle \overset{(2.8)}{=} \langle \xi, a \rangle$$

Таким образом, функционалы $m^*(e^*_{\mathcal{A}}, \xi)$ и ξ принимают равные значения на любом векторе алгебры $\mathcal{A}$, а это и означает их равенство. Аналогично проверяется свойство $m^*(\xi, e^*_{\mathcal{A}}) = \xi$, что завершает доказательство единичности функционала $e^*_{\mathcal{A}}$ (2.17) относительно умножения m^*.

В заключение отметим, что все необходимые свойства дуальных операций являются следствием свойств соответствующих *коопераций.* Мы уже убедились, что асооциативность m^* есть следствие коассоциативности Δ. Точно так же, коассоциативность дуального коумножения Δ^* будет следовать из ассоциативности умножения m в исходной алгебре Хопфа, и так далее. Вся эта картинка совершенно симметрична в обе стороны, поэтому алгебры Хопфа $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ называют еще *взаимно дуальными.*

3 Примеры коструктур и алгебр Хопфа

В этом разделе приведены некоторые примеры наиболее известных алгебр Хопфа. Мы подробно рассмотрим универсальную обертывающую алгебру полупростой комплексной алгебры Ли, алгебру функций на группе и так называемую групповую алгебру, порожденную некоторой конечной (для простоты изложения) группой. Кроме того, мы приведем определение коумножения и коединицы на алгебре регулярных функций на некоммутативной матричной алгебре $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$, которое индуцировано матричным умножением в $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$.

Универсальная обертывающая алгебра полупростой алгебры Ли

Выберем некоторую конечномерную полупростую алгебру Ли $\mathcal{L}$, порожденную генераторами $\{e_i\}$ с перестановочными соотношениями

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^{\,k}\, e_k, \tag{3.1}$$

и перейдем к ее универсальной обертывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{L})$. Для упрощения обозначений генераторы универсальной обертывающей будем обозначать теми же буквами e_i, а ее единицу — символом $1_{\mathcal{U}}$. Структура алгебры Хопфа на алгебре $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ задается следующим образом.

Утверждение 3.1 Коумножение Δ, коединица ε и антипод S на генераторах универсальной обертывающей алгебры действуют следующим образом

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1_{\mathcal{U}} + 1_{\mathcal{U}} \otimes e_i, \qquad \Delta(1_{\mathcal{U}}) = 1_{\mathcal{U}} \otimes 1_{\mathcal{U}}, \tag{3.2}$$

$$\varepsilon(e_i) = 0, \qquad \varepsilon(1_{\mathcal{U}}) = 1_{\mathbb{K}}, \tag{3.3}$$

$$S(e_i) = -e_i, \qquad S(1_{\mathcal{U}}) = 1_{\mathcal{U}}. \tag{3.4}$$

На произвольные элементы алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ действие этих операций распространяется по свойству (анти)гомоморфности.

Смысл последней фразы этого Утверждения заключается в следующем. Свойство гомоморфности отображения Δ по определению означает, что

$$\forall\, a, b \in \mathcal{U}(\mathcal{L}): \qquad \Delta(a+b) = \Delta(a) + \Delta(b), \quad \Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b). \tag{3.5}$$

Но любой элемент универсальной обертывающей алгебры порождается произведением конечного числа ее генераторов (или конечной линейной комбинацией таких произведений), поэтому элементы Хопфовой структуры достаточно задать на генераторах $\mathcal{U}(\mathcal{L})$.

Нулевые значения коединицы (3.3) на генераторах полупростой алгебры Ли практически очевидны, поскольку отображение коединицы реализует одномерное представление, а у полупростой алгебры Ли нетривиальные одномерные представления отсутствуют.

Отметим еще симметричность правой части (3.2). Эта симметричность означает, что универсальная обертывающая алгебра является *кокоммутативной* алгеброй Хопфа, то есть $\Delta = P \circ \Delta$.

Для проверки справедливости Утверждения 3.1 необходимо доказать, что отображения Δ, ε и S действительно являются гомоморфизмами универсальной обертывающей алгебры. Для этого требуется, чтобы упомянутые отображения сохраняли перестановочные соотношения алгебры Ли (3.1). Проверим это на примере коумножения Δ. Пользуясь определением (3.2) получаем

$$\Delta(e_i)\Delta(e_j) = e_i e_j \otimes 1_{\mathcal{U}} + 1_{\mathcal{U}} \otimes e_i e_j + e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i.$$

Вычитая из этого выражения произведение $\Delta(e_j)\Delta(e_i)$ с обратным порядком генераторов, приходим к результату

$$\begin{aligned}&\Delta(e_i)\Delta(e_j) - \Delta(e_j)\Delta(e_i) = \\ &\qquad (e_i e_j - e_j e_i) \otimes 1_{\mathcal{U}} + 1_{\mathcal{U}} \otimes (e_i e_j - e_j e_i) = C_{ij}^k (e_k \otimes 1_{\mathcal{U}} + 1_{\mathcal{U}} \otimes e_k) = C_{ij}^k \Delta(e_k).\end{aligned}$$

Таким образом, линейное отображение (3.2) сохраняет перестановочные соотношения между генераторами. После этого на основе (3.5) оно очевидным образом продолжается до гомоморфизма всей универсальной обертывающей алгебры $\Delta : \mathcal{U}(\mathcal{L}) \to \mathcal{U}(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{L})$. Аналогичная проверка легко выполняется и для отображений ε и S, определенных посредством (3.3) и (3.4).

Теперь проверим, выполняются ли различные соотношения между коумножением, коединицей и антиподом, требуемые определением алгебры Хопфа (см. определение 2.2 в разделе 2).

Свойство коассоциативности отображения (3.2) на уровне генераторов универсальной обертывающей алгебры выполняется, поскольку

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(e_i) = e_i \otimes 1_{\mathcal{U}} \otimes 1_{\mathcal{U}} + 1_{\mathcal{U}} \otimes e_i \otimes 1_{\mathcal{U}} + 1_{\mathcal{U}} \otimes 1_{\mathcal{U}} \otimes e_i = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(e_i)$$

и

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(1_{\mathcal{U}}) = 1_{\mathcal{U}} \otimes 1_{\mathcal{U}} \otimes 1_{\mathcal{U}} = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(1_{\mathcal{U}}).$$

Убедимся теперь в справедливости формулы (2.14)

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta.$$

Как и прежде, ее достаточно проверить на генераторах обертывающей алгебры. Для генераторов e_i получаем

$$\begin{aligned}&m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(e_i) = m \circ (e_i \otimes S(1_{\mathcal{U}}) + 1_{\mathcal{U}} \otimes S(e_i)) = \\ &\qquad\qquad m(e_i, 1_{\mathcal{U}}) - m(1_{\mathcal{U}}, e_i) = 0 = \eta \circ \varepsilon(e_i),\end{aligned}$$

а для единицы алгебры

$$m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(1_{\mathcal{U}}) = m \circ (1_{\mathcal{U}} \otimes S(1_{\mathcal{U}})) = 1_{\mathcal{U}} = \eta \circ \varepsilon(1_{\mathcal{U}}).$$

Для второй части формулы все проверяется аналогично.

Обратимся теперь к другому соотношению в алгебре Хопфа (см. (2.7))

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta=\mathrm{id}.$$

На уровне генераторов $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ имеем

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta(e_i)=e_i\otimes\varepsilon(1_{\mathcal{U}})+1_{\mathcal{U}}\otimes\varepsilon(e_i)=e_i\otimes 1_{\mathbb{K}}=e_i=\mathrm{id}(e_i)\\&(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta(1_{\mathcal{U}})=1_{\mathcal{U}}\otimes\varepsilon(1_{\mathcal{U}})=1_{\mathcal{U}}=\mathrm{id}(1_{\mathcal{U}}).\end{aligned}$$

Таким образом, отображения (3.2) – (3.4) удовлетворяют всем требованиям определения структур алгебры Хопфа.

Получим теперь для алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ явный вид общей формулы (2.12), позволяющей по заданному представлению алгебры Хопфа в линейном пространстве V получить ее представление в пространстве $\mathrm{End}(V)$ линейных операторов, действующих в V.

Итак, пусть есть некоторое представление $\hat{T}$ алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ (а следовательно и алгебры Ли $\mathcal{L}$) в пространстве V:

$$a\mapsto\hat{T}(a)\in\mathrm{End}(V),\quad\forall\, a\in\mathcal{U}(\mathcal{L}).$$

Построим представление Q алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ в пространстве $\mathrm{End}(V)$. Вновь ограничимся генераторами универсальной обертывающей алгебры. Согласно общей формуле (2.12) действие оператора $\mathsf{Q}(e_i)$ на произвольный линейный оператор $\hat{F}\in\mathrm{End}(V)$ сводится к следующему

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}(e_i)\triangleright\hat{F}&=\hat{T}(e_{i(1)})\hat{F}\,\hat{T}(S(e_{i(2)}))=\\&\hat{T}(e_i)\hat{F}\,\hat{T}(S(1_{\mathcal{U}}))+\hat{T}(1_{\mathcal{U}})\hat{F}\,\hat{T}(S(e_i))=\hat{T}(e_i)\hat{F}\,\hat{I}_V+\hat{I}_V\hat{F}\,\hat{T}(-e_i)=\\&\hat{T}(e_i)\hat{F}-\hat{F}\,\hat{T}(e_i)=[\hat{T}(e_i),\hat{F}],\end{aligned}$$

где $\hat{I}_V=\hat{T}(1_{\mathcal{U}})$ — тождественный оператор на пространстве V. Здесь мы воспользовались явным выражением элементов $e_{i(1)}$ и $e_{i(2)}$, входящих в компактные обозначения Свидлера для коумножения:

$$\Delta(e_i)=e_{i(1)}\otimes e_{i(2)}=e_i\otimes 1_{\mathcal{U}}+1_{\mathcal{U}}\otimes e_i.$$

Таким образом, операторы Q реализуют присоединенное действие представления $\hat{T}$ в пространстве $\mathrm{End}(V)$ (см. формулу (2.11)).

Алгебра функций на группе и групповая алгебра

Рассмотрим теперь один из простейших примеров взаимно дуальных алгебр Хопфа. Пусть G — конечная группа, то есть группа с конечным числом элементов (например, группа перестановок m объектов). Группа выбрана конечной только для того, чтобы избежать сложностей технического характера, которые возникают при работе с бесконечномерными пространствами.

Наша ближайшая цель будет состоять в построении так называемой групповой алгебры $\mathbb{K}[G]$ и алгебры линейных функций $\mathrm{Fun}(G)$ на $\mathbb{K}[G]$. На этих алгебрах задается структура алгебры Хопфа и они оказываются дуальными друг другу.

Итак, пусть группа G содержит n различных элементов $|G|=n$, которые мы обозначим $g_i, 1\le i\le n$, единичный элемент пусть будет первым в этой нумерации $e_G=g_1$. Образуем

n-мерное линейное пространство $\mathbb{K}[G]$, базисом которого будем считать эти групповые элементы. То есть, вектора пространства $\mathbb{K}[G]$ представляют собой всевозможные линейные комбинаций базисных векторов g_i с числовыми коэффициентами из поля $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[G] = \{v \mid v = \sum_{i=1}^{n} v^i g_i,\ v^i \in \mathbb{K}\}.$$

Это линейное пространство легко превращается в ассоциативную $\mathbb{K}$-алгебру с единицей, поскольку на базисных векторах имеется групповое умножение

$$\forall\, i, j : \quad g_i \cdot g_j = g_k \in \{g_1, \dots, g_n\}.$$

Таким образом, имеем очевидное правило умножения произвольных векторов $u, v \in \mathbb{K}[G]$

$$u \cdot v = \sum_{i,j} u^i v^j\, g_i \cdot g_j \in \mathbb{K}[G].$$

Ассоциативная алгебра с единицей $\mathbb{K}[G]$ называется групповой алгеброй группы G. Алгебра $\mathbb{K}[G]$ коммутативна тогда и только тогда, когда группа G абелева.

Заметим, что теория представления любой группы G является фактически теорией представлений ее групповой алгебры $\mathbb{K}[G]$. Действительно, сопоставляя элементам группы линейные операторы в пространстве представления V, мы автоматически получаем возможность не только перемножать эти операторы в соответствии с групповым законом, но и складывать их и умножать на элементы числового поля по правилам алгебры $\mathrm{End}(V)$ (данные операции в самой группе отсутствуют). Таким образом, любое представление группы может быть расширено до представления ее групповой алгебры и наоборот, если есть представление групповой алгебры, то ограничивая его на базисные вектора (элементы группы), мы получим некоторое представление самой группы.

Структура алгебры Хопфа на $\mathbb{K}[G]$ вводится так.

Утверждение 3.2 Коумножение Δ_G, коединица ε_G и антипод S_G действуют на базисные векторы g_i алгебры $\mathbb{K}[G]$ следующим образом

$$\Delta_G[g_i] = g_i \otimes g_i \tag{3.6}$$
$$\varepsilon_G[g_i] = 1_{\mathbb{K}} \tag{3.7}$$
$$S_G[g_i] = g_i^{-1} \tag{3.8}$$

На произвольные элементы алгебры $\mathbb{K}[G]$ действие этих операций распространяется по свойству линейности.

Доказательство этого утверждения оставим читателю в качестве простого упражнения.

Примером другой важной алгебры, связанной с группой, является алгебра функций на ней. По определению, $\mathbb{K}$-значной функцией на группе называется отображение $f : G \to \mathbb{K}$. В силу конечности группы $|G| = n$, любая функция на ней представляется некоторым вектором пространства $\mathbb{K}^n$. Множество функций на группе естественным образом наделяется структурой коммутативной алгебры над полем $\mathbb{K}$, в которой в качестве произведения и сложения функций выбирается поточечное умножение и сложение их значений:

$$(f_1 \cdot f_2)(g) = f_1(g) f_2(g), \qquad (f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g), \tag{3.9}$$

а умножение функций на числа из поля $\mathbb{K}$ дается соответствующим правилом пространства $\mathbb{K}^n$: $(\alpha f)(g_i) := \alpha \cdot f(g_i)$. Единицей алгебры $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ является функция 1_F, тождественно равная $1_{\mathbb{K}}$ на любом элементе группы G:

$$\forall\, g \in G, \quad 1_F(g) = 1_{\mathbb{K}} \quad \Rightarrow \quad 1_F \cdot f = f \quad \forall\, f \in \mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G).$$

Такое задание алгебраических операций позволяет расширить алгебру $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ до алгебры линейных функций на групповой алгебре $\mathbb{K}[G]$. Для этого достаточно положить по определению:

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i f(g_i), \quad \forall\, f \in \mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G),\ \forall\, v \in \mathbb{K}[G].$$

Помимо описанной выше алгебраической структуры множество $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ обладает и коалгебраической структурой, превращающей ее в алгебру Хопфа.

Утверждение 3.3 В алгебре функций $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ можно задать отображения коумножения Δ_F, коединицы ε_F и антипода S_F следующим действием на произвольный элемент $f \in \mathrm{Fun}(G)$:

$$\Delta_F[f](g_1, g_2) = f(g_1 \cdot g_2) \quad \forall\, g_1, g_2 \in G, \tag{3.10}$$

$$\varepsilon_F[f] = f(e_G) \in \mathbb{K} \tag{3.11}$$

$$S_F[f](g) = f(g^{-1}) \qquad \forall\, g \in G. \tag{3.12}$$

В этих формулах e_G обозначает единичный элемент группы G, а $g_1 \cdot g_2$ — групповое произведение g_1 и g_2.

Конечно, необходимо проверить корректность определения операций алгебры Хопфа на $\mathbb{K}[G]$ и $\mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$, приведенных в Утверждениях 3.2 и 3.3, доказав, что для них выполнены все необходимые аксиомы из опеделения алгебры Хопфа. Это несложное упражнение оставляем для читателя.

И последнее утверждение в связи с примерами этих алебр Хопфа заключается в следующем.

Утверждение 3.4 Алгебры Хопфа $\mathcal{G} = \mathbb{K}[G]$ и $\mathcal{F} = \mathrm{Fun}_{\mathbb{K}}(G)$ со структурами Δ_G, ε_G и S_G из Утверждения 3.2 и Δ_F, ε_F и S_F из Утверждения 3.3 соответственно образуют пару взаимно дуальных алгебр Хопфа относительно билинейной формы

$$\langle\, ,\rangle : \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \mathbb{K} : \quad \langle f, v\rangle := f(v), \quad \forall\, f \in \mathcal{F}, \forall\, v \in \mathcal{G}.$$

Алгебра полиномиальных функций на $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$

Рассмотрим некоммутативную алгебру $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$, состоящую из всех $N \times N$ матриц над числовым полем $\mathbb{K}$. Это конечномерная ассоциативная алгебра, одним из возможных базисов которой является базис матричных единиц E_i^j, $1 \le i, j \le N$. Напомним, что матрица E_i^j имеет единственный ненулевой матричный элемент равный $1_{\mathbb{K}}$, который расположен на пересечении i-й строки и j-го столбца. Отсюда лекго следует правило умножения матричных единиц:

$$E_i^j E_k^s = \delta_k^j\, E_i^s.$$

Рассмотрим дуальное пространство линейных функционалов на этих матрицах, которое можно отождествить с пространством $N \times N$ матриц: значение любого функционала $Q \in \mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{K})$ на произвольной матрице $A \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$ определяется билинейной формой

$$\langle Q, A\rangle = \mathrm{Tr}(QA). \tag{3.13}$$

Определяя поточечное умножение линейных функций $(Q \cdot R)(A) = Q(A)R(A)$ мы построим бесконечномерную коммутативную ассоциативную алгебру $\mathcal{P}_N$ полиномиальных функций на матричной алгебре $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$. Оказывается, матричное умножение в алгебре $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$ индуцирует через двойственность (3.13) структуру биалгебры на $\mathcal{P}_N$.

Введем *линейные* отображения $\Delta : \mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{K}) \otimes \mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{K})$ и $\varepsilon : \mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ следующими правилами для произвольного функционала $Q \in \mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{K})$ и произвольных матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{K})$:

$$\langle\, \Delta[Q]\,,\, A \otimes B\rangle_{(2)} = \langle Q\,,\, A \cdot B\rangle, \qquad \varepsilon[Q] = Q(I_N), \tag{3.14}$$

где $A \cdot B$ обозначает матричное умножение, I_N — единичная $N \times N$ матрица, а билинейная форма (3.13) продолжается на тензорные квадраты соответствующих пространств следующим естественным способом:

$$\langle Q \otimes R, A \otimes B\rangle_{(2)} := \langle Q, A\rangle\langle R, B\rangle.$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.5 Расширим действие линейных отображений Δ и ε, заданных формулами (3.14) на линейных функционалах, на всю алгебру $\mathcal{P}_N$ полиномиальных функций потребовав от расширенных операций свойства гомоморфности, то есть, положим по определению

$$\Delta[Q_1Q_2] = \Delta[Q_1]\Delta[Q_2], \quad \varepsilon[Q_1Q_2] = \varepsilon[Q_1]\varepsilon[Q_2], \qquad \forall\, Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_N.$$

Тогда операции Δ и ε будут коумножением и коединицей в коммутативной алгебре $\mathcal{P}_N$.

Доказательство оставляем в качестве упражнения читателю. В качестве полезного указания отметим следующее. Введем в пространстве $\mathrm{Mat}_N^*(\mathbb{K})$ базис $\{L_i^j\}$, двойственный базису матричных единиц относительно формы (3.13):

$$\langle L_i^j, E_k^s\rangle = \delta_i^s \delta_k^j.$$

Определите явные формулы действия коумножения Δ и коединицы ε на базисные элементы L_i^j и проверьте все аксиомы коструктур на этих элементах. В силу свойства гомоморфизма для Δ и ε этой проверки будет достаточно для доказательства общего утверждения.

Список литературы

[A] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge tracts in mathematics 74, Cambridge Univ. Press, 1980.

[Dr] V.G. Drinfel'd, *Quantum groups*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Bercley, 1986, ed. A.M. Gleason, pp. 798 – 820.

[Ба] Ю.А. Бахтурин, *Основные структуры современной алгебры*, Москва, "Наука", 1990.

[Н] М.А. Наймарк, *Теория представлений групп*, Москва, "Наука", 1986.