Теория представлений алгебры уравнения отражений

Срок сдачи: 25 мая 2021

1. Операторы q-антисимметризации $A^{(k)}_{12\dots k} = A^{(k)}(R_1, R_2, \dots, R_{k-1})$ и q-симметризации $S^{(k)}_{12\dots k} = S^{(k)}(R_1, R_2, \dots, R_{k-1})$ (образы в R-матричном представлении примитивных идемпотентов алгебры Гекке, отвечающих соответственно одностолбцовым и однострочным диаграммам Юнга) задаются следующими рекуррентными формулами:

$$A^{(1)} = I, \qquad A^{(k+1)}_{12\dots k+1} = \frac{1}{(k+1)_q} A^{(k)}_{12\dots k}\Big(q^k - k_q R_k\Big) A^{(k)}_{12\dots k}, \quad k \ge 1,$$

$$S^{(1)} = I, \qquad S^{(k+1)}_{12\dots k+1} = \frac{1}{(k+1)_q} S^{(k)}_{12\dots k}\Big(q^{-k} + k_q R_k\Big) S^{(k)}_{12\dots k}, \quad k \ge 1.$$

Здесь $R_i = R_{i\,i+1}$, где R является R-матрицей $GL(N)$ типа, $k_q := (q^k - q^{-k})/(q - q^{-1})$ — q-деформация целого числа. Найдите явные выражения (в терминах q-антисимметризаторов и q-симметризаторов) для частичных R-следов $\mathrm{Tr}_{R(r+1\dots k)} A^{(k)}$ и $\mathrm{Tr}_{R(r+1\dots k)} S^{(k)}$, где $0 \le r \le k-1$.

Указание. При решении задачи полезно пользоваться формулами "q-арифметики":

$$q^{-a} b_q + q^b a_q = (b+a)_q, \qquad q^a b_q - q^b a_q = (b-a)_q.$$

2. Представление алгебры уравнения отражений

$$R_1 L_1 R_1 L_1 - L_1 R_1 L_1 R_1 = 0, \quad L = \|l_i^j\|_{1 \le i,j \le N}$$

с R-матрицей $GL(N)$ типа в тензорных степенях N-мерного пространства V задается формулой:

$$L_{\underline{k+1}} \triangleright e_1 e_2 \dots e_k = J^{-1}_{k+1} e_1 e_2 \dots e_k, \qquad L_{\underline{k+1}} := R_k^{-1} L_{\underline{k}} R_k,$$

где $\{e_i\}_{1 \le i \le N}$ — базис пространства V, а J^{-1}_{k+1} — R-матричное представление обратного элемента Юциса-Мерфи:

$$J^{-1}_{k+1} = R_k^{-1} \dots R_2^{-1} R_1^{-2} R_2^{-1} \dots R_k^{-1}.$$

Для представления в третьей тензорной степени $V^{\otimes 3}$:

а) Найдите явную формулу действия центрального элемента $p_2(L) = \mathrm{Tr}_R L^2$ на произвольный базисный вектор:

$$p_2(L) \triangleright e_1 e_2 e_3 = ?$$

Указание. Докажите и используйте формулу:

$$I_{12\dots k}\, p_2(L) = \mathrm{Tr}_{R(k+1 k+2)}(R_{k+1} L_{\underline{k+2}} L_{\underline{k+1}}).$$

б) R-матричное представление примитивных идемпотентов алгебры Гекке $H_3(q)$, отвечающих таблицам Юнга разбиений числа 3, порождает семейство ортогональных проекторов $P_\mu \in \mathrm{End}(V^{\otimes 3})$, $\mu \vdash 3$ (пример таких проекторов для однострочной и одностобцовой диаграммы из трех клеток приведен в задаче 1: это соответственно

q-симметризатор $S^{(3)}$ и q-антисимметризатор $A^{(3)}$). Эти проекторы дают разложение пространства $V^{\otimes 3}$ в прямую сумму подпространств V_μ:

$$V^{\otimes 3} = \bigoplus V_\mu, \quad V_\mu = \operatorname{Im} P_\mu.$$

Докажите, что центральный элемент $p_1(L) = \mathrm{Tr}_R(L)$ при действии на вектора каждого подпространства V_μ представляется скалярным оператором

$$p_1(L)|_{V_\mu} = \alpha_\mu \,\mathrm{Id}_{V_\mu}$$

и найдите явное выражение для спектральных значений a_μ, отвечающих разбиениям числа 3.

3*. Перейдем к новым генераторам k_i^j алгебры уравнения отражений с помощью следующего сдвига:

$$L = I - (q - q^{-1})K.$$

Докажите, что для любого подпространства $V_\nu \in V^{\otimes k}$, $\nu \vdash k$, справедлива формула:

$$\mathrm{Tr}_R(K)|_{V_\nu} = \beta_\nu \,\mathrm{Id}_{V_\mu},$$

где спектр β_ν имеет вид

$$\beta_\nu = q^{-2N} \sum_{r=1}^{s} q^{2r-1-\nu_r} (\nu_r)_q,$$

где $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_s$ — компоненты разбиения ν, а $(\nu_r)_q$ — их q-деформации.

Указание. Воспользуйтесь теорией алгебр Гекке, где доказывается, что любой примитивный идемпотент Y_λ^a, отвечающий таблице Юнга $\lambda(a)$ (индекс a перечисляет все таблицы данной диаграммы λ), является собственным вектором всех элементов Юциса-Мерфи относительно регулярного представления:

$$J_k Y_\lambda^a = q^{2(c_k - r_k)} Y_\lambda^a,$$

где c_k и r_k — номера колонки и ряда в соответствующей таблице Юнга $\lambda(a)$, на пересечении которых находится клетка с числом k.