Группы Ли, R-матрицы и квантовые группы

Алгебра RTT и Алгебра уравнения отражений — примеры квантовых матричных алгебр.

В этой лекции мы рассмотрим структуру алгебр, полученных квантованием коммутативной алгебры $Fun(Mat_N^*)$ с пуассоновыми скобками Склянина и Семёнова-Тянь-Шанского. Свойства этих алгебр существенно различаются (начиная от алгебраической структуры и до теории представлений), но обе они относятся к классу так называемых квантовых матричных алгебр (эти объекты введены А. Исаевым, О. Огиевецким и П. Пятовым в работе "On quantum matrix algebras, satisfying the Cayley-Hamilton-Newton identities", Journal Phys. A.: Math. Gen. 32 (1999) p. L115-L121).

I RTT алгебра.

0 Ассоциативная алгебра с единицей, порожденная N^2 генераторами $T_i^{\,j}$ с перестановочными соотношениями вида

$$\boxed{\sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{N} R_{i_1 i_2}^{\alpha_1\alpha_2} T_{\alpha_1}^{\,j_1} T_{\alpha_2}^{\,j_2} = \sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{N} T_{i_1}^{\,\alpha_1} T_{i_2}^{\,\alpha_2} R_{\alpha_1\alpha_2}^{j_1 j_2}, \qquad (1)}$$

где $R = \| R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \|$ $N^2 \times N^2$ матрица, представляющая собой решение уравнения кос

$$R_{12} R_{23} R_{12} = R_{23} R_{12} R_{23},$$

будет называться RTT алгеброй и обозначаться $\mathcal{T}(R)$.

Удобно ввести матрицу с некоммутативными матричными элементами

$$T = \| T_i^{\,j} \| = \begin{pmatrix} T_1^{\,1} & T_1^{\,2} & \dots & T_1^{\,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_N^{\,1} & T_N^{\,2} & \dots & T_N^{\,N} \end{pmatrix},$$

то есть, нижний индекс нумерует строки, а верхний — столбцы. Тогда перестановочные соотношения (1) можно записать в компакт-ном матричном виде:

$$\boxed{R_{12}\, T_1 T_2 = T_1 T_2 R_{12}\,,\quad (2)}$$

где $T_1 := T \otimes \mathbb{1}_{N\times N}$, $T_2 := \mathbb{1}_{N\times N} \otimes T$.

Это — равенство двух $N^2\times N^2$ матриц с некоммутативными матричными элементами, а (1) — просто поэлементная запись этого матричного равенства. Для придания строгого математического смысла "матрице с некоммутативными элементами" упомянем, что объект $T = \|T_i{}^j\|$ принадлежит алгебре $\mathrm{End}(\mathbb{C}^N) \otimes \mathcal{T}(R)$:

$$T = \sum_{i,j=1}^{N} E_i{}^j \otimes T_i{}^j\,,$$

где $E_i{}^j$ — стандартные матричные единицы. В этом смысле, T_1 и T_2 — объекты из $\mathrm{End}(\mathbb{C}^N)^{\otimes 2} \otimes \mathcal{T}(R)$ вида:

$$T_2 = \mathbb{1} \otimes E_i{}^j \otimes T_i{}^j$$
$$T_1 = E_i{}^j \otimes \mathbb{1} \otimes T_i{}^j\,.$$

И вообще, согласно нашим =4=
правилам о матричных обозначениях,
T_k есть объект из $End(\mathbb{C}^n)^{\otimes p} \otimes \mathcal{T}(R)$
для $\forall\ p \geq k$ вида:

$$T_k = \underbrace{1 \otimes \ldots \otimes 1}_{(k-1)\ \text{сомножителей}} \otimes E_i{}^j \otimes \underbrace{1 \ldots \otimes 1}_{(k-p)\ \text{сомножителей}} \otimes T_i{}^j.$$

Сформулированное определение RTT
алгебры $\mathcal{T}(R)$ охватывает широкий
класс (по числу решений соотн. кос)
алгебр, мы добавим некоторые ограниче-
ния на R, которые позволят эффек-
тивно исследовать свойства $\mathcal{T}(R)$.

Отметим только, что если R есть
R-матрица Дринфельда – Джимбо:

$$R = q\sum_{i=1}^{N} E_i{}^i \otimes E_i{}^i + \sum_{i \neq j} E_i{}^j \otimes E_j{}^i + \lambda \sum_{i<j} E_i{}^i \otimes E_j{}^j$$

$$\lambda \equiv q - \frac{1}{q}$$

то RTT алгебра (точнее, её фактор по
соотношению $\det_R T = 1$, см. дальше)
представляет собой квантованную

алгебру функций на группе $SL(N)$ — один из первых примеров так называемых <u>квантовых групп</u>.

Другие решения R соотношения кос приводят к квантовым группам B, C и D серий.

Зачем нужно требовать от R соотношения кос? Для R-матрицы Дринфельда-Джимбо мы знаем, что это свойство в классическом пределе обеспечивает классическое уравнение Янга-Бакстера на r ($\hat{R} = PR = \mathbb{1} + hr + \ldots$, $h = \ln q$), что, в свою очередь, дает тождество Якоби на скобку Склянина. На квантовом уровне соотношение кос на R обеспечивает <u>отсутствие дополнительных соотношений</u> на генераторы T_i^j (кроме квадратичных (1)), которые могли бы возникнуть в однородных компонентах 3-ей, 4-ой и т.п. степеней алгебры $\mathcal{T}(R)$.

Поясним на примере кубических мономов по генераторам $T_i{}^j$. В терминах R-матрицы $\check{R}_{12} = P_{12} R_{12}$ RTT-соотношения (2) принимают вид:

$$\boxed{\begin{aligned} &\check{R}_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 \check{R}_{12} \text{ или} \\ &T_1 T_2 = \check{R}_{12}^{-1} T_2 T_1 \check{R}_{12}. \qquad (3) \end{aligned}}$$

При этом

$$\check{R}_{12} \check{R}_{23} \check{R}_{12} = \check{R}_{23} \check{R}_{12} \check{R}_{23} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} &R_{12} R_{13} R_{23} = \\ &= R_{23} R_{13} R_{12} \end{aligned}}$$

Уравнение Янга-Бакстера.

Возьмём произвольный кубический моном $T_{i_1}{}^{j_1} T_{i_2}{}^{j_2} T_{i_3}{}^{j_3}$ – матричный элемент матрицы $T_1 T_2 T_3$ и с помощью (3) преобразуем его к виду $T_{i_3}{}^{j_3} T_{i_2}{}^{j_2} T_{i_1}{}^{j_1} + \ldots$

Этого можно достичь <u>2 путями</u>:

(А): $\underline{T_1 T_2} T_3 \longrightarrow T_2 \underline{T_1 T_3} \longrightarrow \underline{T_2 T_3} T_1 \longrightarrow \underline{\underline{T_3 T_2 T_1}}$

(Б): $T_1 \underline{T_2 T_3} \longrightarrow \underline{T_1 T_3} T_2 \longrightarrow T_3 \underline{T_1 T_2} \longrightarrow \underline{\underline{T_3 T_2 T_1}}$

Пользуясь (3) получим:

(А): $T_1 T_2 T_3 = R_{12}^{-1} T_2 \underline{T_1 T_3} R_{12} =$

$= R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} \underline{T_2 T_3} T_1 R_{13} R_{12} = \underline{R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} R_{23}^{-1}} T_3 T_2 T_1 \cdot \underline{R_{23} R_{13} R_{12}}$

(Б): $T_1 T_2 T_3 = \underline{R_{23}^{-1} R_{13}^{-1} R_{12}^{-1}} T_3 T_2 T_1 \underline{R_{12} R_{13} R_{23}}.$

Если бы результаты преобразований по пути (А) и (Б) отличались, то вычитая одно из другого мы получили бы $0 =$ Результат (А) $-$ Результат (Б) $-$ нетривиальное кубическое соотношение на генераторы.

Требование ~~соотношения~~ кос на R ($\Leftrightarrow$ уравнение Янга-Бакстера на R) обеспечивает совпадение результатов преобразований на пути (А) и (Б) и не позволяет возникать новым соотношениям на генераторы T_i) (старших порядков) помимо определяющих соотношений (1).

Дальше мы будем считать R-матрицу <u>R матрицей $GL(N)$ типа</u> (R-матрица Дринф.-Джимбо – хорошо известный пример.).

Напомним, что это означает:

- R является Гекковской R-матрицей:

$$R^2 = \mathbb{1} + \lambda R \Leftrightarrow (R - q\mathbb{1})(R + \tfrac{1}{q}\mathbb{1}) = 0$$

Как следствие: $R^{-1} = R - \lambda$

- R – <u>строго</u> <u>кособратимая</u> R-матрица.

То есть, $\exists$ $N^2 \times N^2$ матрица ~~$\Psi_{i_1 i_2}$~~

$\Psi = \| \Psi_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \|$:

$$\boxed{\mathrm{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi_{23} = P_{13} = \mathrm{Tr}_{(2)} \Psi_{12} R_{23}}$$

Свойство кособратимости.

$$C_1 := \mathrm{Tr}_{(0)} \Psi_{01} \Leftrightarrow C_i{}^j = \sum_{a=1}^{N} \Psi_{a\, i}^{a\, j}$$

$$D_1 := \mathrm{Tr}_{(2)} \Psi_{12} \Leftrightarrow D_i{}^j = \sum_{a=1}^{N} \Psi_{i\, a}^{j\, a}.$$

$$\boxed{D \cdot C = C \cdot D = \frac{1}{q^{2N}} \mathbb{1}}$$ – <u>Строгая</u> кособратимость.

$$\mathrm{Tr}\, D = \mathrm{Tr}\, C = \frac{N_q}{q^N}, \quad K_q := \frac{q^K - q^{-K}}{q - 1/q}.$$

- Матрица R позволяет реализовать представление алгебры Гекке $H_m(q)$ в пространстве $V^{\otimes m}$, $\dim V = N$: $\forall\, g_i \in H_m \mapsto R_{i\,i+1} \in \mathrm{End}(V^{\otimes m})$

Эти представления порождают ряд q-антисимметризаторов $A^{(m)}(R)$ — образов примитивных идемпотентов $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline \vdots\\ \hline m\\ \hline\end{array} \in H_m(q)$.

R принадлежит $GL(N)$ типу $\Rightarrow A^{(m)}(R) \equiv 0$
$\forall\, m > N$

и ранг $A^{(N)} = 1$.

Можно доказать следующие очень полезные формулы для $A^{(m)}(R)$:

$$A^{(1)} \equiv 1\!\!1_{N\times N} \qquad A^{(2)}_{12} = \frac{1}{2_q}(q\,\underset{\uparrow}{1\!\!1} - R_{12})$$

$1\!\!1$ в $\mathrm{End}(V^{\otimes 2})$

$$\boxed{\begin{aligned} A^{(k)}_{1\ldots k} &= \frac{1}{k_q} A^{(k-1)}_{1\ldots k-1}\left(q^{k-1} 1\!\!1 - (k-1)_q R_{k-1\,k}\right) A^{(k-1)}_{1\ldots k-1} = \\ &= \frac{1}{k_q} A^{(k-1)}_{2\ldots k}\left(q^{k-1} 1\!\!1 - (k-1)_q R_{12}\right) A^{(k-1)}_{2\ldots k} \qquad (4) \end{aligned}}$$

Здесь нижние индексы у $A^{(k)}$ показывают номера множителей в $V^{\otimes k}$, где A действует нетривиально.

С помощью матрицы D определяется так называемый R-след Tr_R:

$$\boxed{Tr_R F := Tr(D\cdot F)} \quad \forall\ N\times N \text{ матрицы } F.$$

Множественный R-след:

$$Tr_{R(12\ldots k)} X_{1\ldots k} := Tr_{(12\ldots k)}\left(D_1 D_2 \ldots D_k X_{1\ldots k}\right).$$

Из определения кососбратной Ψ и матрицы D сразу следует:

$$\left.\begin{aligned} Tr_{R(2)} R_{12} &= \mathbb{1}_1 \\ Tr_{R(2)} \mathbb{1}_{12} &= \frac{N_q}{q^N}\mathbb{1}_1 . \end{aligned}\right\} \quad (\star)$$

Антисимметризаторы $A^{(m)}$ связаны посредством частичных R-следов:

$$\boxed{Tr_{R(k+1\ldots N)} A^{(N)}_{1\ldots N}(R) = q^{-N(N-k)} \frac{(N-k)_q!\, k_q!}{N_q!} A^{(k)}_{1\ldots k}} \quad (5)$$

Эта формула получается на основе разложения (4) для антисимметризаторов и формул ($\cancel{A}$) на стр. =10=.

Взяв в (5) $k=0$ $(A^{(0)} \equiv 1)$, получаем значение полного R-следа от $A^{(n)}$:

$$\boxed{Tr_{R(1\dots n)} A^{(n)}_{1\dots n} = q^{-N^2}.}$$

В силу общих свойств представлений q-антисимметризаторы удовлетворяют свойствам:

$$R_i A^{(m)}_{1\dots m} = A^{(m)}_{1\dots m} R_i = -\frac{1}{q} A^{(m)}_{1\dots m}$$

$$1 \le \forall i \le m-1$$

$$A^{(k)}_{1\dots k} \cdot A^{(m)}_{1\dots m} = A^{(m)}_{1\dots m} A^{(k)}_{1\dots k} = A^{(m)}_{1\dots m}$$

$$\forall\ k \le m.$$

Рассмотрим теперь вопрос о количестве независимых соотношений на генераторы T_i^j, содержащихся среди N^2

равенств матричных элементов (1)

Будем считать R-матрицей Дринфельда-Джимбо. В этом случае RTT алгебра связана к квантовой группой $Fun_q(SL(N))$ и наше рассмотрение послужит основой для важного утверждения о "плоскости" квантования алгебры функций со скобкой Склянина.

"Плоскость" квантования (или деформации) коммутативной алгебры означает, что размерности пространств однородных мономов ~~~~ ~~~~ фиксированной степени, построенных из генераторов коммутативной алгебры, совпадают с размерностью пространств мономов соответствующей степени в некоммутативной алгебре. Пример этого — Теорема Пуанкаре-Биркхофа-Витта, доказывающая, что $U(g)$ — плоское квантовавание $Fun(g^*)$ относительно скобки Пуассона - Ли.

Плоскость квантования означает, что запас независимых функций в коммутативной алгебре не изменился после квантования.

$\boxed{V}$ Соотношения (2): $R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}$ эквивалентны паре матричных соотношений

$$\boxed{\begin{aligned} A^{(2)}_{12}\, T_1 T_2\, S^{(2)}_{12} &= 0 \\ S^{(2)}_{12}\, T_1 T_2\, A^{(2)}_{12} &= 0 \end{aligned}} \quad (A)$$

Здесь $S^{(2)}_{12} = \frac{1}{2_q}\left(\frac{1}{q}\mathbb{1} + R_{12}\right)$ - аналог q-симметризатора.

$\boxed{\text{Зам.}}$ Можно определить и старшие симметризаторы - образы идемпотентов $\boxed{1|2|\dots|m}$ алгебры Гекке H_m относительно R-матричного представления $g_i \mapsto R_i$.

$$\boxed{S^{(1)} \equiv \mathbb{1} \qquad S^{(k)}_{1\dots k} = \frac{1}{k_q} S^{(k-1)}_{1\dots k-1}\left(q^{-(k-1)} + (k-1)_q R_{k-1\,k}\right)\cdot S^{(k-1)}_{1\dots k-1}.}$$

Доказательство:

Распишем равенства $\binom{\text{☆}}{\text{☆}}$, подставив вид $A^{(2)}$ и $S^{(2)}$:

$$0 = R_{12}T_1T_2R_{12} + \frac{1}{q}R_{12}T_1T_2 - qT_1T_2R_{12} - T_1T_2$$

$$0 = R_{12}T_1T_2R_{12} - qR_{12}T_1T_2 + \frac{1}{q}T_1T_2R_{12} - T_1T_2.$$

(i) Пусть выполнены соотношения (2), т.е. $R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}$. Тогда выполнено каждое из равенств $\binom{\text{☆}}{\text{☆}}$. Проверим, например, первое:

$$\underline{R_{12}T_1T_2}R_{12} + \frac{1}{q}\underline{R_{12}T_1T_2} = T_1T_2R_{12}^2 + \frac{1}{q}T_1T_2R_{12} =$$

$$= \{R^2 = 1\!\!1 + \lambda R\} = T_1T_2 + \left(q - \frac{1}{q}\right)T_1T_2R_{12} + \frac{1}{q}T_1T_2R_{12} =$$

$$= \underline{T_1T_2 + qT_1T_2R_{12}}$$

Именно это вычитается в первом равенстве из суммы $R_{12}T_1T_2R_{12} + \frac{1}{q}R_{12}T_1T_2$.

Аналогично проверяется второе равенство $\binom{\text{☆}}{\text{☆}}$.

Итак, из $(2) \Rightarrow \binom{\text{☆}}{\text{☆}}$.

(ii) Пусть выполнены равенства (☆☆). Вычтем из первого второе:

$$\left(\frac{1}{q}+q\right)R_{12}T_1T_2-\left(q+\frac{1}{q}\right)T_1T_2R_{12}=0.$$

Поскольку $2_q=q+\frac{1}{q}\neq 0$, получаем соотношение (г): $R_{12}T_1T_2=T_1T_2R_{12}$. ∎

$\boxed{\text{Зам.}}$ Напомним, что у нас всегда параметр q в "общем положении", т.е. $q^k\neq\pm1$ $\forall k>0$. При этом алгебры Гекке $H_m(q)$ полупросты и изоморфны групповым алгебрам $\mathbb{C}[S_m]$ групп перестановок S_m.

Доказанное утверждение позволяет найти число независимых соотношений, налагаемых равенствами (2), поскольку это число совпадает с независимыми соотношениями среди равенств (☆☆).

Рассмотрим линейное N^4-мерное пространство, порожденное квадратичными некоммутативными мономами.

$$W=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(T_{i_1}^{j_1}T_{i_2}^{j_2}\right).$$

2 линейных оператора $\hat{Q}_{1,2} \in End(W)$, действующих по правилу $\hat{Q}_1 \triangleright T_1 T_2 = A^{(2)} T_1 T_2 S^{(2)}$

$\hat{Q}_2 \triangleright T_1 T_2 = S^{(2)} T_1 T_2 A^{(2)}$

являются <u>ортогональными</u> проекторами

$$\hat{Q}_i^2 = \hat{Q}_i \qquad \hat{Q}_1 \hat{Q}_2 = \hat{Q}_2 \hat{Q}_1 = 0 ,$$

в силу свойств: $A^{(2)} \cdot A^{(2)} = A^{(2)}$

$$S^{(2)} \cdot S^{(2)} = S^{(2)}$$

$$A^{(2)} \cdot S^{(2)} = S^{(2)} \cdot A^{(2)} = 0$$

Условие Гекке на $\vec{R}$.

В силу ортогональности $\hat{Q}_1 \hat{Q}_2 = 0$ образы $Im \hat{Q}_1 \subset W$ и $Im \hat{Q}_2 \subset W$ пересекаются только по нулевому элементу. Соотношения $\left(\begin{matrix}\star \\ \star\end{matrix}\right) \Leftrightarrow$ требованию $Im \hat{Q}_1 = 0$ и $Im \hat{Q}_2 = 0 \Rightarrow$ Число независимых соотношений в $\left(\begin{matrix}\star \\ \star\end{matrix}\right)$ равно <u>сумме</u> размерностей образов $Im \hat{Q}_1$ и $Im \hat{Q}_2$. Но так как $\hat{Q}_1$ и $\hat{Q}_2$ — <u>проекторы</u>, то их ранги совпадают с их <u>следами</u> (размерность образа линейного оператора равна его рангу):

$$\operatorname{Tr}\hat{Q}_1 = \operatorname{Tr}\hat{Q}_2 = (\operatorname{Tr} A^{(2)})\cdot(\operatorname{Tr} S^{(2)})$$

след в N^4 мерном пр-ве

следы в N^2-мерном пространстве.

Вычислим $\operatorname{Tr} A^{(2)}_{\pm} = \operatorname{Tr}_{(12)} \frac{(q\mathbb{1}-R_{12})}{2q}$

$$R_{12} = q\sum_{i=1}^{N} E_i^{\,i}\otimes E_i^{\,i} + \sum_{i\neq j} E_i^{\,j}\otimes E_j^{\,i} + \lambda\sum_{i<j} E_i^{\,i}\otimes E_j^{\,j} \Big/ \Rightarrow$$

$$\operatorname{Tr} E_i^{\,j} = \delta_i^{\,j}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr}_{(2)} R_{12} = q\sum_{i=1}^{N} E_i^{\,i} + \lambda\sum_{i=1}^{N-1} E_i^{\,i}(N-i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr}_{(12)} R_{12} = Nq + \lambda\frac{N(N-1)}{2}$$

$$\operatorname{Tr}_{(12)} A^{(2)}_{12} = \frac{1}{2q}\operatorname{Tr}_{(12)}(q\mathbb{1}_{12} - R_{12}) =$$

$$= \frac{1}{2q}\left(qN^2 - Nq - \frac{\lambda}{2}N(N-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2q}\frac{(N-1)}{2}(2qN - \underbrace{\lambda}_{q-\frac{1}{q}} N) = \frac{N(N-1)}{2}$$

Аналогично имеем:

$$\mathrm{Tr}_{(12)} S^{(2)}_{12} = \frac{1}{2_q} \mathrm{Tr}_{(12)} \left(\frac{1}{q} \mathbb{1}_{12} + R_{12} \right) = \frac{N(N+1)}{2}$$

Итак, $\mathrm{Tr}\,\hat{Q}_1 = \mathrm{Tr}\,\hat{Q}_2 = \dfrac{N^2(N^2-1)}{4}$

Поэтому всего в $(\overset{\star}{\star})$ (а значит и в (r)) имеется $2 \cdot \dfrac{N^2(N^2-1)}{4} = \dfrac{N^2(N^2-1)}{2}$

~~Соотношений~~. Размерность пространства квадратичных мономов в RTT алгебре для R-матрицы Дринфельда-Джимбо равна

$$N^4 - \frac{N^2(N^2-1)}{2} = \frac{N^2(N^2+1)}{2}$$

— такая же, как и в коммутативной алгебре $\mathrm{Fun}(\mathrm{Mat}^*_N)$.

$\boxed{\text{Упражнение}^{*}}$ Для $N=2$ $R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$.

Обозначив $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ найдите явный вид перестановочных соотношений для a, b, c, d и докажите, что произвольный моном степени m может быть выражен в виде линейной комбинации упорядоченных мономов (порядок $a<b<c<d$)

$$a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{k_4}, \quad k_1+k_2+k_3+k_4=m$$
$$k_i \geq 0.$$

~~Сделайте~~ Найдите размерность пространства однородных мономов степени m и сделайте вывод о плоскости квантования скобки Скленина для $N=2$.

Структура алгебры Хопфа

$\boxed{\text{V}}$ Для произвольной R-матрицы, удовлетворяющей соотношению КЮР, RTT алгебра $\mathcal{T}(R)$ является би-алгеброй со следующими операциями:

- Коумножение $\Delta: \mathcal{T}(R) \to \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R)$

$$\Delta(T_i{}^j) = \sum_{k=1}^{N} T_i{}^k \otimes T_k{}^j$$
$$\Updownarrow$$
$$\Delta(T_1) = T_1 \otimes T_1$$

- Коединица $\varepsilon: \mathcal{T}(R) \to \mathbb{C}$

$$\varepsilon(T_i{}^j) = \delta_i{}^j.$$

$\boxed{\text{Зам}}$ $\boxed{!}$ Отображение Δ – это гомоморфизм алгебр. Структура алгебры на пространстве $\mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R)$ вводится по правилу $(a \otimes b) * (\tilde{a} \otimes \tilde{b}) :=$

$$= (a \cdot \tilde{a}) \otimes (b \cdot \tilde{b}),$$

где $a \cdot \tilde{a}$ – произведение элементов $\mathcal{T}(R)$. То есть, умножение $*$ есть композиция таких отображений:

$$* : (\mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R))^{\otimes 2} \to \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R) :$$

$$* = (m_{\mathcal{T}} \otimes m_{\mathcal{T}}) \circ (id_{\mathcal{T}} \otimes P \otimes id_{\mathcal{T}})$$

обычная перестановка.

Умножение в RTT алгебре.

Доказательство утверждения – налогичное упражнение.

Чтобы выяснить вопрос об антиподе, нам потребуется определение детерминанта квантовой матрицы T.

Поскольку R – матрица $GL(N)$ типа, то ранг антисимметризатора $A^{(N)}(R)$ равен 1. Поэтому матрица $A^{(N)}$

(размером $N^N \times N^N$) может быть представлена в виде:

$$A^{(N)}{}_{i_1\dots i_N}^{j_1\dots j_N} = u_{i_1\dots i_N}\, v^{j_1\dots j_N},$$

где $u_{i_1\dots i_N}$ — N^N-матрица-столбец, а $v^{j_1\dots j_N}$ — N^N-матрица строка.

Пример $\underline{N=2}$: $R = \cancel{\frac{1}{2q}} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{(2)} = \frac{1}{2q}\left(q - R\right) = \frac{1}{2q}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тензоры u и v определены с точностью до ненулевого множителя $u \to \alpha u$; $v \to \frac{1}{\alpha} u$

В данном примере можно взять:

$$u = \| u_{ij} \| = \frac{\alpha}{2q}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \| v^{ij} \| = \frac{1}{\alpha}\left(0, \frac{1}{q}, -1, 0\right);$$

$$\| u_{i_1 i_2} v^{j_1 j_2} \| = \frac{1}{2q}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{(2)}{}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}.$$

$$\equiv$$

$$\frac{1}{2q}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(0, \frac{1}{q}, -1, 0\right).$$

Введём удобное обозначение:

$$\| u_{i_1 \dots i_N} \| = u_{|12 \dots N\rangle}$$

$$\| v^{i_1 \dots i_N} \| = v^{\langle 12 \dots N|}$$

Тогда $A^{(N)}_{1 \dots N} = u_{|1 \dots N\rangle} v^{\langle 1 \dots N|}$

В силу того, что $\operatorname{rang} A^{(N)} = 1 \Rightarrow$

$$\operatorname{Tr}_{(1 \dots N)} A^{(N)} = \sum_{\{i\}} u_{i_1 \dots i_N} v^{i_1 \dots i_N} \equiv \underline{v^{\langle 1 \dots N|} u_{|1 \dots N\rangle} = 1}$$

$\boxed{У}$ Имеют место следующие равенства:

(а) $$\sum_{a_1, \dots, a_N = 1}^{N} D_{i_1}^{a_1} D_{i_2}^{a_2} \dots D_{i_N}^{a_N} u_{a_1 \dots a_N} = q^{-N^2} u_{i_1 \dots i_N},$$

или, в матричных обозначениях:

$$D_1 D_2 \dots D_N u_{|1 \dots N\rangle} = q^{-N^2} u_{|1 \dots N\rangle} \qquad (6)$$

(б) Аналогичное равенство для v:

$$v^{\langle 1 \dots N|} D_1 \dots D_N = q^{-N^2} v^{\langle 1 \dots N|}$$

Доказательство: Ранее мы получали

такое свойство матриц $\mathcal{D}$:

$$R_{i\,i+1}\mathcal{D}_i\mathcal{D}_{i+1} = \mathcal{D}_i\mathcal{D}_{i+1}R_{i\,i+1} \quad (*)$$

(формула (13) на стр. 16 лекции "R-матрицы и инварианты зацеплений").

q-антисимметризатор $A^{(N)}(R)$ есть полином от матриц $R_1, R_2, \ldots, R_{N-1}$ и поскольку в силу (*):

$$R_i\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N R_i \quad 1\le i\le N-1,$$

то $A^{(N)}_{1\ldots N}\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N A^{(N)}_{1\ldots N}$.

Воспользуемся ещё тем, что $A^{(N)}$ — проектор, т.е. $A^{(N)} = A^{(N)}\cdot A^N$ и получим такую формулу:

$$A^{(N)}\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N = A^{(N)}\cdot\underbrace{A^{(N)}\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N}_{\longrightarrow} = A^{(N)}\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N A^{(N)}.$$

Но

$$A^{(N)}\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N A^{(N)} = u_{|1\ldots N\rangle}v^{\langle 1\ldots N|}\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N u_{|1\ldots N\rangle}v^{\langle 1\ldots N|}$$

Выражение

$$v^{\langle 1\ldots N|}\mathcal{D}_1\ldots\mathcal{D}_N u_{|1\ldots N\rangle} \equiv \sum_{\{i\}\{j\}} v^{i_1\ldots i_N}\cdot \mathcal{D}_{i_1}^{\;j_1}\ldots\mathcal{D}_{i_N}^{\;j_N}\cdot u_{j_1\ldots j_N} \equiv$$

$$\equiv Tr_{R(1\dots n)} A^{(n)}_{1\dots n} = q^{-n^2}.$$

Левая часть:

$$A^{(n)} D_1 \dots D_n = u_{|1\dots n\rangle} v^{\langle 1\dots n|} D_1 \dots D_n$$

В итоге получаем:

$$u_{|1\dots n\rangle} \underbrace{v^{\langle 1\dots n|} D_1 \dots D_n}_{} = u_{|1\dots n\rangle} \underbrace{q^{-n^2} v^{\langle 1\dots n|}}_{}$$

$$\Downarrow$$

$$v^{\langle 1\dots n|} D_1 \dots D_n = q^{-n^2} v^{\langle 1\dots n|}$$

Второе равенство (для $u_{|1\dots n\rangle}$) доказывается аналогично на основе неравенства

$$D_1 \dots D_n A^{(n)} = A^{(n)} D_1 \dots D_n A^{(n)}. \quad \blacksquare$$

[O] Квантовым детерминантом матрицы T назовем величину:

$$\det_R T := Tr_{(1\dots n)} \left(A^{(n)}_{1\dots n} T_1 \dots T_n \right). \equiv$$

$$\equiv v^{\langle 1\dots n|} \cdot T_1 \dots T_n \cdot u_{|1\dots n\rangle}$$

[Зам.] Эта формула — обобщение детерминанта обычной матрицы.

Действительно, в случае числовых матриц =25=

$$u_{i_1\dots i_N} = \frac{1}{N!}\varepsilon_{i_1\dots i_N}$$

$$v^{i_1\dots i_N} = \varepsilon^{i_1\dots i_N}$$

где $\varepsilon^{i_1\dots i_N}$ – полностью антисимметричный тензор ранга N,

$$A^{(N)} = \frac{1}{N!}\varepsilon_{i_1\dots i_N}\varepsilon^{j_1\dots j_N}$$

$$Tr_{(1\dots N)} A^{(N)} T_1\dots T_N = \frac{1}{N!}\varepsilon^{i_1\dots i_N} T_{i_1}^{j_1}\dots T_{i_N}^{j_N}\varepsilon_{j_1\dots j_N} =$$

$$= \det T.$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ $\det_R T$ выражен в виде <u>следа</u> по всем пространствам от произведения $A^{(N)}_{1\dots N} T_1\dots T_N$. Пользуясь формулами (6) детерминант можно представить в виде R-следов:

$$\det_R T = q^{N^2} Tr_{R(1\dots N)}\left(A^{(N)}_{1\dots N} T_1\dots T_N\right)$$

Такая нормировка обеспечивает "групповое свойство" детерминанта относительно коумножения:

$\boxed{У}$ Имеет место соотношение:

$$\Delta(\det{}_R T) = \det{}_R T \otimes \det{}_R T.$$

<u>Доказательство:</u>

Установим вначале матричное тождество:

$$A^{(n)}_{1\ldots n} T_1 \ldots T_n = T_1 \ldots T_n A^{(n)}_{1\ldots n} =$$

$$= (\det{}_R T) A^{(n)}_{1\ldots n}$$

Первое равенство справедливо в силу того, что $A^{(n)}$ – полином от $R_1, \ldots, R_n$ и $R_i T_i T_{i+1} = T_i T_{i+1} R_i$ (совершенно аналогично случаю с матрицами $\mathcal{D}$).

Далее, пользуясь $A^{(n)} \cdot A^{(n)} = A^{(n)}$, получаем:

$$A^{(n)} T_1 \ldots T_n = A^{(n)} T_1 \ldots T_n A^{(n)} \equiv$$

$$\equiv u_{|1\ldots n\rangle} \underbrace{v^{\langle 1\ldots n|} T_1 \ldots T_n u_{|1\ldots n\rangle}}_{\overset{(1)}{=} \operatorname{Tr} A^{(n)} T_1 \ldots T_n = \det_R T} v^{\langle 1 \ldots n|} =$$

$$= (\det{}_R T) u_{|1\ldots n\rangle} v^{\langle 1\ldots n|} = (\det{}_R T) A^{(n)}_{1\ldots n}.$$

Теперь нужная формула для Δ легко получается; если учесть, что в силу ~~коммутативно~~ гомоморфности Δ: $\Delta(T_1\dots T_N) = T_1\dots T_N \otimes T_1 \dots T_N$.

Теперь имеем:

$$\underline{\Delta\left(A^{(N)}T_1\dots T_N\right)} = A^{(N)}\Delta(T_1\dots T_N) =$$

$$= \underset{\substack{\parallel \\ A^{(N)}\cdot A^{(N)}}}{A^{(N)}} T_1\dots T_N \otimes T_1\dots T_N = A^{(N)}T_1\dots T_N \otimes A^{(N)}T_1\dots T_N =$$

$$= \det{}_R T A^{(N)}_{1\dots N} \otimes \det{}_R T A^{(N)}_{1\dots N} =$$

$$= \left(\det{}_R T \otimes \det{}_R T\right) A^{(N)}_{1\dots N} = \underline{\Delta\left(\det{}_R T A^{(N)}_{1\dots N}\right)} =$$

$$= \Delta\left(\det{}_R T\right) A^{(N)}_{1\dots N}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\left(\det{}_R T\right) = \det{}_R T \otimes \det{}_R T \quad \blacksquare$$

Коммутативная подалгебра и Тождество Гамильтона-Кэли.

Определим в алгебре $\mathcal{T}(R)$ набор из N однородных полиномов от генераторов $T_i^{\,j}$ по следующему правилу:

$$\boxed{0}\ e_k(T) := Tr_{R(1\ldots k)}\left(A^{(k)}_{1\ldots k}(R)\, T_1 \ldots T_k\right)$$

(Степень e_k) $= k$ — это аналог элементарных симметрических функций от спектральных значений матрицы T в коммутативном случае:

$$e_k(T) \xrightarrow[q\to 1]{} \sum_{i_1<\ldots<i_k} \mu_{i_1} \ldots \mu_{i_k}\,,$$ где

μ_i — собственные значения матрицы T (числовые).

Введём, также, внешнюю квантовую степень матрицы T:

$$\boxed{0}\ T_1^{\wedge k} := Tr_{R(2\ldots k)}\left(A^{(k)}_{1\ldots k}\, T_1 \ldots T_k\right)$$

и аналог обычной степени:

$$T_1^{\overline{k}} = Tr_{R(2,\ldots,k)}\left(T_1 \ldots T_k R_{k-1} \ldots R_1\right)$$

Объекты $T^{\wedge k}$ и $T^{\overline{k}}$ — матрицы размером $N\times N$, поскольку по 1-му пространству R-след не вычисляется.

Очевидна связь: $e_k(T) = \mathrm{Tr}_R\, T^{\wedge k}$

Кроме того, $p_k(T) \equiv \mathrm{Tr}_R(T^{\overline{k}})$ — аналог степенных сумм от спектральных переменных T при $q \to 1$.

$\boxed{\text{Зам}}$ При $q \to 1$ $R \to P$ и $T^{\overline{k}}$ превращаются в <u>обычные</u> матричные степени. ($\mathrm{Tr}_R \to \mathrm{Tr}$, т.к. $D \to \mathbb{I}$):

$$T_1^{\overline{2}} = \mathrm{Tr}_{(2)} T_1 T_2 R_{12} \xrightarrow{q \to 1} \mathrm{Tr}_{(2)} T_1 T_2 P_{12} =$$

$$= \mathrm{Tr}_{(2)} T_1 P_{12} T_1 = T_1^2$$

$$T_1^{\overline{3}} \xrightarrow[q\to 1]{} \mathrm{Tr}_{(23)} T_1 T_2 T_3 P_{23} P_{12} = \mathrm{Tr}_{(2)} T_1 T_2^2 P_{12} = T_1^3$$

и так далее.

$\boxed{\text{У}}$ (а) Элементы $e_k(T)$ генерируют коммутативную подалгебру в $\mathcal{T}(R)$:

$$e_k(T)\, e_p(T) = e_p(T)\, e_k(T) \quad \forall p, k.$$

(б) Элементы $e_k(T)$ и $p_k(T)$ связаны (квантовыми) тождествами Ньютона:

$$\boxed{k_q e_k(T) - q^{k-1} p_1(T) e_{k-1}(T) + q^{k-2} p_2(T) e_{k-2}(T) + \ldots + (-1)^{k-1} p_k(T) \equiv 0}$$

$$p_k(T) = Tr_{R(1\ldots k)}(T_1 \ldots T_k R_{k-1} \ldots R_1)$$

$$e_k(T) := Tr_{R(1\ldots k)}(A^{(k)}_{1\ldots k} T_1 \ldots T_k)$$

(в) Степени $T^{\wedge k}$ и $T^{\overline{k}}$ связаны тождеством Гамильтона – Кэли – Ньютона:

$$\boxed{(-1)^{k-1} k_q T^{\wedge k} = \sum_{r=0}^{k-1} (-q)^r T^{\overline{k-r}} e_r(T)} \quad \boxed{(7)}$$

<u>Доказательство:</u>

Докажем (в). Тождества из (б) получаются взятием R-следа от тождества Гамильтона – Кэли – Ньютона (7). Доказательство (в) целиком основано на рекуррентной формуле (4) на стр. =9= для антисимметризаторов $A^{(k)}$.

Введём для упрощения выкладок обозначение:

$$Tr_{R(2\ldots k)} X \equiv \langle X \rangle_{2\ldots k} \quad \forall X.$$

Согласно (4) $k_q A^{(k)}_{1\ldots k} = q^{k-1} A^{(k-1)}_{2\ldots k} -$

$$- (k-1)_q A^{(k-1)}_{2\ldots k} R_{12} A^{(k-1)}_{2\ldots k}.$$

Подставим это в определение $T^{\wedge k}$:

$$k_q T^{\wedge k}_1 := k_q \langle A^{(k)}_{1\ldots k} T_1 \ldots T_k \rangle_{2\ldots k} =$$

$$= \langle T_1 \ldots T_k (k_q A^{(k)}) \rangle_{2\ldots k} =$$

$$= q^{k-1} \langle T_1 \underline{T_2 \ldots T_k} \, \underline{A^{(k-1)}_{2\ldots k}} \rangle_{2\ldots k} -$$

$$- (k-1)_q \langle T_1 \ldots T_k A^{(k-1)}_{2\ldots k} R_{12} A^{(k-1)}_{2\ldots k} \rangle_{2\ldots k} =$$

$$= q^{k-1} T_1 \underbrace{\langle T_2 \ldots T_k A^{k-1}_{2\ldots k} \rangle_{2\ldots k}}_{\equiv e_{k-1}(T)} -$$

$$- (k-1)_q \langle T_1 \ldots T_k A^{(k-1)}_{2\ldots k} R_{12} A^{(k-1)}_{2\ldots k} \rangle_{2\ldots k}$$

Во втором слагаемом воспользуемся циклическим свойством R-следа для последнего $A^{(k-1)}_{2\ldots k}$, пронесём его через цепочку $T_1\ldots T_k$ и перемножим с первым $A^{(k-1)}_{2\ldots k}$ по правилу умножения проекторов: $A^{(k-1)}\cdot A^{(k-1)} = A^{(k-1)}$:

$$\langle T_1\ldots T_k A^{(k-1)}_{2\ldots k} R_{12} A^{(k-1)}_{2\ldots k}\rangle_{2\ldots k} = \langle A^{(k-1)}_{2\ldots k} T_1\ldots T_k A^{(k-1)}_{2\ldots k} R_{12}\rangle_{2\ldots k} =$$

цикл. св-во следа по $2\ldots k$

$$= \langle T_1\ldots T_k A^{(k-1)}_{2\ldots k} R_{12}\rangle_{2\ldots k}.$$

Получаем промежуточную формулу:

$$k_q T_1^{\wedge k} = q^{k-1} T_1 e_{k-1}(T) - (k-1)_q \langle T_1\ldots T_k A^{(k-1)}_{2\ldots k} R_{12}\rangle_{2\ldots k}$$

Во втором слагаемом опять пользуемся (4) для $(k-1)_q A^{(k-1)}_{2\ldots k}$ и получаем:

$$(k-1)_q \langle T_1\ldots T_k A^{(k-1)}_{2\ldots k} R_{12}\rangle_{2\ldots k} =$$

$$= q^{k-2}\langle T_1\ldots T_k A^{(k-2)}_{3\ldots k} R_{12}\rangle_{2\ldots k} - (k-2)_q \langle T_1\ldots T_k \cdot A^{(k-2)}_{3\ldots k} R_{23} R_{12}\rangle_{2\ldots k} =$$

$$= q^{k-2}\langle T_1 T_2 R_{12}\rangle_{(2)} \langle T_3\ldots T_k A^{(k-2)}_{3\ldots k}\rangle_{3\ldots k} - (k-2)_q \langle T_1\ldots T_k A^{(k-2)}_{3\ldots k} R_2 R_1\rangle_{2\ldots k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_q T^{\wedge k} = q^{k-1} T_1 e_{k-1}(T) - q^{k-2} T_1^{\bar{2}} e_{k-2}(T) + $$
$$+ (k-2)_q \langle T_1 \ldots T_k A^{(k-2)}_{3\ldots k} R_2 R_1 \rangle_{2\ldots k}$$

Дальше очередная процедура понижение порядка антисимметризаторов завершится последним слагаемым вида:

$$(-1)^{k-1} \langle T_1 \ldots T_k \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{A^{(1)}_1} R_{k-1} \ldots R_1 \rangle_{2\ldots k} =$$
$$= (-1)^{k-1} T^{\bar{k}} \Rightarrow$$

$$k_q T^{\wedge k} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} q^{k-r} T_1^{\bar{r}} e_{k-r}(T).$$

Умножив обе части на $(-1)^{k-1}$ и переобозначив переменную суммирования $r \to k-r$ получим формулу (7).

Мы не будем доказывать коммутативность $e_k(T)$, упомянем только более общий результат из цитированной выше работы Исаева, Огиевского и Пятова:

$\boxed{V}$ Пусть $Y^{(k)}(R_1, \ldots, R_{k-1})$ — $\forall$ полином от матриц $R_1, \ldots, R_{k-1}$. Тогда элементы RTT алгебры $\mathcal{T}(R)$ вида

$$Tr_{R(1\ldots k)}\left(Y^{(k)}(R)\, T_1 \ldots T_k\right) \text{ и}$$

$$Tr_{R(1\ldots s)}\left(\cancel{X}^{(s)}(R)\, T_1 \ldots T_s\right)$$

<u>коммутируют</u> друг с другом при $\forall$ полиномах $Y^{(k)}$ и $X^{(s)}$.

Коммутативная подалгебра таких элементов называется <u>характеристической</u>, а элементы $e_1(T), \ldots, e_N(T)$ — её независимые генераторы.

В качестве генераторов можно взять также "степенные суммы" $p_1(T), \ldots, p_N(T)$.

В отличие от $e_k(T)$, которых ровно N штук ($e_{N+1} \equiv e_{N+2} \equiv \ldots \equiv 0$ в силу зануления антисимметризаторов $A^{(N+1)} \equiv A^{(N+2)} \equiv \ldots \equiv 0$), элементы $p_k(T)$ не равны 0 при $\forall k$.

Однако алгебраически независимых среди них тоже только N штук $p_1, \dots, p_N$. Это связано с тождеством Гамильтона-Кэли для матрицы T:

$\boxed{У}$ $\boxed{!}$ В алгебре $End(\mathbb{C}^N) \otimes \mathcal{T}(R)$ справедливо следующее матричное тождество (квантовое тождество Гамильтона-Кэли):

$$\boxed{T^N - q T^{N-1} e_1(T) + q^2 T^{N-2} e_2(T) + \dots + (-1)^N e_N \mathbb{1} = 0} \quad (8)$$

Доказательство:

Рассмотрим тождество Гамильтона-Кэли-Ньютона (7) при $k = N$.

Преобразуем левую часть:

$$(-1)^{N-1} N_q T^{\wedge N} = (-1)^{N-1} N_q \mathrm{Tr}_{R(2\dots N)} A^{(N)}_{1\dots N} T_1 \dots T_N =$$

$$= (-1)^{N-1} N_q (\det{}_R T) \mathrm{Tr}_{R(2\dots N)} A^{(N)}_{1\dots N} =$$

= (пользуемся (5) на стр =10= для $k=1$) =

$= (-1)^{N-1} q^{-N(N-1)} \det_R T \, \mathbb{1}_1 =$

$= (-1)^{N-1} q^N \underbrace{(q^{-N^2} \det_R T)}_{= e_N(T)} \mathbb{1} \Rightarrow$

$$-(-q)^N e_N(T) \mathbb{1} = \sum_{r=0}^{N-1} (-q)^r T^{\overline{N-r}} e_r(T)$$

$$\boxed{\sum_{r=0}^{N} (-q)^r T^{\overline{N-r}} e_r(T) \equiv 0}$$ – тожд. Гамильтона – Кэли. Здесь $T^{\bar{0}} \equiv \mathbb{1}$. ∎

$\boxed{\text{У}}$ Для $\mathcal{T}(R)$ определяемой R-матрицей $GL(N)$ типа элемент $\det_R T$ является центральным:

$$T_i^{\ j} \det_R T = \det_R T \cdot T_i^{\ j}$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ $\det_R T$ не всегда центральный элемент RTT алгебры. Точное вычисление даёт следующее:

$$(M\cdot T)_i{}^j \det_R T = \det_R T\,(T\cdot M)_i{}^j,$$

где <u>числовая</u> матрица M определяется частичной свёрткой структурных тензоров u и v антисимметризатора $A^{(n)}$:

$$\boxed{M_i{}^j = \sum_{\{\alpha\}} u_{i\alpha_2\ldots\alpha_n} v^{\alpha_2\ldots\alpha_n j}}$$

<u>Если</u> матрица M скалярна, то есть, кратна единичной, то $\det_R T$ — центральный элемент.

Для $GL(n)$ R-матрицы Дринфельда–Джимбо: $M = 1\!\!1\cdot\alpha$ ← число.

Если $\det_R T$ — централен, то мы можем расширить алгебру $T(R)$ обратным детерминантом, т.е. добавить ещё один генератор t со свойствами:

$$t\cdot T_i{}^j = T_i{}^j\cdot t \quad \forall i,j$$

$$t\,\det_R T = \det_R T\cdot t = 1.$$

Тогда тождество Гамильтона-Кэли позволит определить матрицу T^{-1}, элементы которой принадлежат расширенной $\mathcal{T}(R)$, со следующим свойством:

$$(T^{-1})_i{}^k T_k{}^j = T_i{}^k (T^{-1})_k{}^j = \delta_i^j 1_{\mathcal{T}}.$$

Для этого просто умножим (8) **слева** на T_1^{-1} и учтем, что

$$T_1^{-1} \cdot T_1^{\overline{k}} = Tr_{(2\dots k)}(T_2 \dots T_k R_{k-1} \dots R_1) \equiv$$

$$\equiv \tilde{T}^{\overline{k-1}} \in End(\mathbb{C}^n) \otimes \mathcal{T}(R).$$

$$T_1^{-1} = (-1)^{N+1} q^{N(N-1)} \cdot t \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} \tilde{T}_1^{\overline{N-k}} (-q) e_{k-1}(T) \right).$$

Например, для $N=2$:

$$T^{-1} = \frac{q^2}{\det_R T} \left(q (Tr_R T) \mathbb{1} - Tr_{R(2)}(T_2 R_{12}) \right).$$

$\boxed{V}$ Рассмотрим линейное антигомоморфное отображение $S: \mathcal{F}(R) \to \mathcal{F}(R)$, которое <u>на генераторах</u> задаётся правилами:

$$S(T_i{}^j) = (T^{-1})_i{}^j$$
$$S(\det_R T) = t$$
$$S(t) = \det_R T$$

и, по определению, $\forall\, a, b \in \mathcal{F}(R)$:

$$S(a \cdot b) = S(b) \cdot S(a).$$

Тогда S — отображение антипода для коумножения Δ и коединицы ε в $\mathcal{F}(R)$, превращающие $\mathcal{F}(R)$ в алгебру Хопфа.

Доказательство этого утверждения оставляем читателю в качестве упражнения.