Семинар 12

Задача 1. (1) Пусть X - гладкая кубика. Докажите, что в любой точке $a \in X \cap He(X)$ кубика X пересекается с гессианом $He(X)$ трансверсально, то есть гессиан $He(X)$ также неособ в точке a, и касательные прямые $\mathbb{T}_aX$ и $\mathbb{T}_aHe(X)$ различны. (Трансверсальное пересечение в точке a обозначается так: $X \underset{a}{\pitchfork} He(X)$.)
(2) Докажите, что прямая $\mathbb{T}_aX$ касается гессиана $He(X)$ в некоторой точке b, отличной от точки a.
Указание: Комментарии к решению этой задачи были даны на семинаре 11 - см. видео и пдф-файл семинара.

Задача 2. Пусть X - гладкая кубика, и $a \in X$. Рассмотрим поляру $P_a(X)$. Как мы знаем, коника $P_a(X)$ содежит точку a. Рассмотрим произвольную прямую l через точку a, и пусть l пересекает кубику X, помимо a, еще в точках в различных точках b и c, а конику $P_a(X)$ еще в точке d. Докажите, что a, d, b, c - гармоническая четверка точек.

Задача 3. Напомним определение пучка кривых данной степени d в $\mathbb{P}^2$. Пусть $F_i = F_i(x),\ i = 1, 2,$ - две формы степени d от набора переменных $x = (x_0, x_1, x_2)$, где $(x_0 : x_1 : x_2)$ - координаты переменной точки в $\mathbb{P}^2$. Рассмотрим кривые $X_1 = V(F_1)$ и $X_2 = V(F_2)$. Для произвольной точки $\lambda = (\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1$ рассмотрим кривую $X_\lambda = V(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)$. Множество $\mathcal{P} = \{X_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{P}^1\}$ таких кривых называется *пучком кривых, порожденным кривыми* X_1 *и* X_2 (или *пучком, натянутым на кривые* X_1 *и* X_2) и обозначается $\mathcal{P} = \langle X_1, X_2\rangle$. Заметим, что если кривые X_1 и X_2 не имеют общих компонент, то они пересекаются в конечном множестве точек $B(\mathcal{P})$, через которые проходит каждая кривая пучка $\mathcal{P}$. (Последнее прямо следует из определения пучка $\mathcal{P} = \langle X_1, X_2\rangle$.) Множество $B(\mathcal{P})$ называется *базисным множеством* пучка $\mathcal{P}$.

Пусть X - гладкая плоская кубика, и пусть $He(X)$ - ее гессиан. Рассмотрим пучок кубик $\mathcal{P}_X = \langle X, He(X)\rangle$, натянутый на кубику X и ее гессиан $He(X)$. Он называется *сизигическим пучком, порожденным кубикой* X. Как мы уже знаем из задач предыдущих семинаров, базисное множество $B(\mathcal{P}_X)$ есть множество точек перегиба кривой X. Возьмем точку $a \in B(\mathcal{P}_X)$.
1) Докажите, что поляры $P_a(X_\lambda)$ для кривых X_λ из пучка $\mathcal{P}_X$ образуют пучок коник.
2) Докажите, что касательные прямые $\mathbb{T}_aX_\lambda$, где $X_\lambda \in \mathcal{P}_X$ также образуют пучок прямых, и для любой прямой l этого пучка найдется единственная кривая X_λ пучка $\mathcal{P}_X$, для которой $l = \mathbb{T}_aX_\lambda$.

Задача 4. В условиях и обозначениях предыдущей задачи рассмотрим поляру $P_a(X)$ точки перегиба $a \in B(\mathcal{P}_X)$. Как мы знаем, $B(\mathcal{P}_X)$ состоит из 9 точек перегиба, $B(\mathcal{P}_X) = \{a = a_0, a_1, a_2 ..., a_8\}$, и каждая прямая, проходящая через любые две различные точки перегиба, проходит через третью точку перегиба. В частности, через точку a проходят 4 различные прямые, скажем, l_1, l_2, l_3, l_4, на которых попарно лежат остальные точки перегиба $a_1, ..., a_8$. Пусть, скажем, на прямой l_i лежат точки a_{2i-1}, a_{2i}, $i = 1, 2, 3, 4$. Далее, из наших предыдущих семинаров мы знаем, что поляра $P_a(X)$ распадается на касательную прямую $\mathbb{T}_aX$ и другую прямую I_X, не проходящую через точку a. Пусть прямая I_X пересекает прямые $l_1, ..., l_4$ в точках $b_1, ..., b_4$ соответственно.

Докажите, что для каждого i от 1 до 4 пара точек a, b_i гармонически делит пару точек a_{2i-1}, a_{2i}. (По этой причине прямая I_X называется *гармонической полярой точки* a относительно кубики X.)

Задача 5. 1) В условиях и обозначениях предыдущей задачи докажите, что точки $b_1, ..., b_4$ лежат на поляре $P_a(X_\lambda)$ для любой кубики X_λ пучка $\mathcal{P}_X$.
2) Выведите отсюда, что поляра $P_a(X_\lambda)$ распадается на касательную прямую $\mathbb{T}_aX_\lambda$ и гармоническую поляру I_X.
3) Докажите, пользуясь предыдущими результатами этой задачи и задач других семинаров, что каждая гладкая кубика X_λ пучка $\mathcal{P}_X$ имеет в a точку перегиба. (По аналогичной причине X_λ имеет в $a_1, a_2 ..., a_8$ также точки перегиба.)

Задача 6. Пусть X - неособая кубика над полем $\mathbb{C}$. Как мы уже знаем, на X определен закон композиции (который будем называть *сложением*), превращающий X в абелеву группу по сложению $(X, +)$. Для произвольного натурального $n \geqslant 2$ подмножество $X_n := \{a \in X \mid na = 0\}$ в X, очевидно, является подгруппой в X. (Здесь под na понимается результат сложения точки $a \in X$ как

элемента группы $(X, +)$ с собой n раз.) Подгруппа X_n называется *подгруппой n-кручения* группы X. Например, мы уже знаем, что если в качестве нуля (т.е. нейтрального элемента) группы $(X, +)$ взять точку перегиба на X, то группа X_3 будет состоять из 9 элементов, а именно, точек перегиба кубики X. Итак, подгруппа X_3 3-кручения в X геометрически реализована точками перегиба на X.
1) Докажите, что имеет место изоморфизм групп $X_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
2) Чему изоморфна подгруппа X_2 2-кручения в X? Укажите какую-нибудь геометрическую реализацию точек группы X_2.
3) Чему изоморфна подгруппа X_4 4-кручения в X?

Задача 7. Пусть $(x_0 : x_1)$ - проективные координаты в $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$. x_0 и x_1 можно рассматривать как линейные формы на V, то есть, как векторы двойственного пространства V^*. Пусть S_3 - пространство кубических форм от переменных x_0, x_1. (Базис этого пространства S_3 составляют мономы $x_0^3,\ x_0^2x_1,\ x_0x_1^2,\ x_1^3$.) Как мы знаем из семинара 12 (см. видеофайл семинара), всякое подпространство W в S_3 задает отображение $f_W : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}(W^*)$, называемое *отображением линейным рядом* $\mathbb{P}(W)$. Размерность пространства $\mathbb{P}(W)$ называется *размерностью линейного ряда* $\mathbb{P}(W)$.
Пусть $W = S_3$, так что $\mathbb{P}(W^*) = \mathbb{P}^3$. Отображение $v_3 = f_{S_3} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ называется *отображением Веронезе степени 3*. Рассмотрим кривую $C = v_3(\mathbb{P}^1)$ - образ отображения v_3.
1) Докажите, что кривая C не является плоской кривой, а значит, каждая плоскость $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^3$ пересекает C в (не более, чем) конечном числе точек.
2) В скольких точках пересекает кривую C общая плоскость в $\mathbb{P}^3$?

Задача 8. 1) Существуют ли квадрики в $\mathbb{P}^3$, проходящие через кривую C? Найдите уравнение хотя бы одной такой квадрики.
2) Две квадрики $Q_1 = V(F_1)$ и $Q_2 = V(F_2)$ в $\mathbb{P}^3$ назовем линейно независимыми, если квадратичные формы F_1 и F_2 линейно независимы. Сколько имеется линейно независимых квадрик в $\mathbb{P}^3$, проходящих через кривую C?