Семинар 13

Задача 1. Приведите пример абелевой группы G, имеющей для любого натурального $n \geqslant 2$ подгруппу n-кручения G_n, изоморфную:
1) группе $\mathbb{Z}_n$,
2) группе $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.
(Определение подгруппы n-кручения дано в задаче 6 к семинару 12.)

Задача 2. Дайте геометрическое описание всех 1-мерных линейных рядов квадрик на проективной прямой $\mathbb{P}^1$, не имеющих базисных точек. (В этой и следующих задачах основное поле $\mathbf{k}$ считается алгебраически замкнутым и $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$).

Задача 3. Пусть X_0 - гладкая плоская кубика. Рассмотрим сизигический пучок кубик $\mathcal{P}_{X_0} = \langle X_0, He(X_0)\rangle$, порожденный кубикой X_0. (Определение сизигического пучка дано в задаче 3 к семинару 12.) Пусть Y - произвольная гладкая кубика из пучка $\mathcal{P}_{X_0}$. Сколько имеется кубик X в пучке $\mathcal{P}_{X_0}$, для которых кубика Y является гессианом, т. е. $Y = He(X)$? Как найти все такие кубики X? (*Указание*: Воспользоваться задачей 2 выше и задачей 1.2) из задания к семинару 12.)

Задача 4. Покажите, что 9 точек перегиба $B_X = \{a_1, ..., a_9\}$ на гладкой кубике X "не имеют модулей" в следующем смысле: для любой другой гладкой кубики X' множество $B_{X'}$ получается из множества B_X проективным преобразованием плоскости.

Задача 5. Пусть $(x_0 : x_1)$ - проективные координаты в $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$. x_0 и x_1 можно рассматривать как линейные формы на V, то есть, как векторы двойственного пространства V^*. Пусть S_3 - пространство кубических форм от переменных x_0, x_1. (Базис этого пространства S_3 составляют мономы $x_0^3,\ x_0^2x_1,\ x_0x_1^2,\ x_1^3$.) Как мы знаем из семинара 12 (см. видеофайл семинара), всякое подпространство W в S_3 задает отображение $f_W : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}(W^*)$, называемое *отображением линейным рядом* $\mathbb{P}(W)$. Размерность пространства $\mathbb{P}(W)$ называется *размерностью линейного ряда* $\mathbb{P}(W)$.
Пусть $W = S_3$, так что $\mathbb{P}(W^*) = \mathbb{P}^3$. Отображение $v_3 = f_{S_3} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ называется *отображением Веронезе степени 3*. Рассмотрим кривую $C = v_3(\mathbb{P}^1)$ - образ отображения v_3.
1) Докажите, что кривая C не является плоской кривой, а значит, каждая плоскость $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^3$ пересекает C в (не более, чем) конечном числе точек.
2) В скольких точках пересекает кривую C общая плоскость в $\mathbb{P}^3$?

Задача 6. 1) Существуют ли квадрики в $\mathbb{P}^3$, проходящие через кривую C? Найдите уравнение хотя бы одной такой квадрики.
2) Две квадрики $Q_1 = V(F_1)$ и $Q_2 = V(F_2)$ в $\mathbb{P}^3$ назовем линейно независимыми, если квадратичные формы F_1 и F_2 линейно независимы. Сколько имеется линейно независимых квадрик в $\mathbb{P}^3$, проходящих через кривую C?