Числа Гурвица. Домашная контрольная работа №2

16.05.2021

Решения нужно присылать по адресу bbychkov@hse.ru до 06.06.2021 включительно.
Оценка за работу равна минимуму из 10 и суммы баллов за правильно решенные задачи.

1. (2 балла) Рассмотрим линейное пространство действительных симметричных матриц S_N размера $N \times N$, $X \in S_N$. Обозначим

$$Z_N^S = \int\limits_{X \in S_N} \exp(-Tr(X^2)) \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N} dX_{ij},$$

найдите Z_N^S и $\frac{1}{Z_N^S} \int\limits_{X \in S_N} Tr(X^2)) \exp(-Tr(X^2)) \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N} dX_{ij}$.

2. (3 балла) Вычислите используя формулу Вика и интерпретируйте при помощи поверхностей = ленточных графов.

$$\frac{1}{Z_N^S} \int\limits_{X \in S_N} Tr(X^4)) \exp(-Tr(X^2)) \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N} dX_{ij}$$

3. (2 балла) Рассмотрим линейное пространство действительных кососимметричных матриц A_N размера $N \times N$, $Y \in S_N$. Обозначим

$$Z_N^A = \int\limits_{Y \in A_N} \exp(Tr(Y^2)) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} dY_{ij},$$

найдите Z_N^A и $\frac{1}{Z_N^A} \int\limits_{Y \in A_N} Tr(Y^2)) \exp(Tr(Y^2)) \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant N} dY_{ij}$.

4. (3 балла) Вычислите используя формулу Вика и интерпретируйте при помощи поверхностей = ленточных графов.

$$\frac{1}{Z_N^A} \int\limits_{Y \in A_N} Tr(Y^4)) \exp(Tr(Y^2)) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} dY_{ij}$$

5. (1 балл) Найдите производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^n s^n$$

6. (1 балл) Найдите производящую функцию

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^n s^n t^k$$

7. (2 балла) В центре групповой алгебры $Z\mathbb{C}[S_3]$ с базисом $C_{1^3}, C_{1^1 2^1}, C_{3^1}$ выпишете матрицы операторов умножения на элементы $C_{1^1 2^1}, C_{3^1}$. Найдите собственные векторы и собственные числа этих операторов.

8. (1 балл) Пусть $b_{m,\nu}$ число разложений перестановки данного циклического типа ν в произведение данного числа перестановок m. Укажите элемент центра групповой алгебры $Z\mathbb{C}[S_n]$, коэффициенты в разложении которого по базису C_ν дают числа $b_{m,\nu}$.

9. Элемент Юциса–Мерфи $X_k \in \mathbb{C}[S_n]$ это сумма транспозиций номера k с меньшими номерами:

$$X_k = (1,k) + (2,k) + \ldots + (k-1,k).$$

а) (1 балл) Проверьте, что элементы X_k попарно коммутируют.
Известно (теорема Юциса и Мерфи), что центр групповой алгебры $Z\mathbb{C}[S_n]$ совпадает с подалгеброй симметрических функций от элементов X_k.
Вырожденность перестановки α это минимальное число транспозиций, необходимое для представления α в виде произведения транспозиций. Обозначим через $C^{(k)} \in Z\mathbb{C}[S_n]$ сумму всех перестановок из S_n вырожденности k.
б) (2 балла) Докажите, что $C^{(k)} = \sigma_k(X_1, \ldots, X_n)$, где $\sigma_k(X_1, \ldots, X_n)$ это k-я элементарная симметрическая функция от элементов Юциса–Мерфи $X_1, \ldots, X_n$.