Данный разбор был записан ассистентом на основе работ студентов, получивших полный балл за обсуждаемые задачи. Представленные решения не претендуют на оптимальность. При возникновении вопросов обращайтесь к семинаристам.

# Решение Контрольной работы №1, Вариант №4

## Задача №1

1. $f(x) := \cosh x \quad x \in [-1, 1]$

Функция $f$ – чётная, поэтому в разложении Фурье по системе $\{1, \sin k\pi x, \cos l\pi x \mid k, l \in \mathbb{N}\}$ будут только слагаемые с $\cos l\pi x$.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\pi x + b_n \cos n\pi x)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sinh(x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} 2\sinh(1) = \sinh(1)$$

$$a_0 = 2\sinh(1), \quad a_n = 0, \quad n \geq 1$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \cosh(x)\cos n\pi x\,dx = 2\underbrace{\int_0^1 \cosh x \cos n\pi x\,dx}_{I} =$$

$$= 2\left[\cos n\pi x \sinh(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \sinh(x)\cdot n\pi \cdot \sin n\pi x\,dx\right] =$$

$$= 2\left[(-1)^n \sinh(1) + \cancelto{0}{n\pi \sin n\pi x \cosh(x)\Big|_0^1} - \int_0^1 \cosh(x)\cdot (n\pi)^2 \cos n\pi x\,dx\right]$$

Получаем, что $I = (-1)^n \sinh(1) - n^2\pi^2 I \Rightarrow I = \dfrac{(-1)^n \sinh(1)}{1 + n^2\pi^2}$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2\sinh(1)\cdot(-1)^n}{1 + n^2\pi^2}$$

$$f \sim \sinh(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^n \sinh(1)}{1 + n^2\pi^2} \qquad (1)$$

2. а) $f \in C[-1;1] \Rightarrow f \in L^2[-1,1]$, $L^2$ – гильбертово, сепарабельно $\Rightarrow$ ряд сходится к $f$ по $L^2$-норме

б) сходимость в $L^2$ влечет сходимость в $L^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ряд сходится к $f$ и по $L^1$-норме

в) Т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^n \sinh 1}{1 + n^2\pi^2} \cos n\pi x$ по модулю мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{C}{1 + \pi^2 n^2}$, который сходится, то равномерная сходимость следует из теоремы Вейерштрасса.

3. а) $A(x) := \sinh 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sinh 1}{1+n^2\pi^2} \cos n\pi x$

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \cdot \pi n \sinh(1)}{1+n^2\pi^2} \sin n\pi x \quad (2)$$

б) <u>Теорема</u>. Если $f \in L^1(-1,1)$, в каждой точке имеет производную слева и справа, то её ряд Фурье сходится всюду, и его сумма равна $f(x)$ в точках непрерывности и равна $\frac{1}{2} \cdot (f(x+0) + f(x-0))$ в точках разрыва

Заметим, что если $f, g \in L^1$ имеют одинаковые ряды Фурье, то $f \sim g$ в $L^1$-смысле.

Также заметим, что ряд (2) - ряд Фурье ф-ии $\sinh(x) \in L^1$.

Получаем, что ряд (2) сходится поточечно к функции $g = \begin{cases} \sinh(x), & x \in [-1+2k, 1+2k], k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}\sinh(1-0) + \frac{1}{2}\sinh(-1+0) = 0, & \text{иначе} \end{cases}$

в) Если бы ряд сходился равномерно (доказана поточечная сходимость), то у предельной функции не должно быть разрывов, но $g(x)$ разрывна в целых нечетных точках $\Rightarrow$ равномерной сходимости нет

г) <u>Лемма</u>. Если $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (*)

Ряд (2) $\xrightarrow[n\to\infty]{\text{поточечно}} g$. Применяя Лемму, получаем поточечную сходимость по Чезаро к ф-ии $g$.

4. а) $$A''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2(-1)^{n+1} n^2\pi^2 \sinh(1)}{1+n^2\pi^2}}_{c_k} \cos n\pi x \quad (3)$$

б) Если $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi x \xrightarrow{L^2} \psi$, то $\psi \in L^2$, так как $L^2$ полно. Обозначим $\varphi_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \cos k\pi x$. Тогда

$\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_n - \psi\| + \|\psi\| \Rightarrow \|\varphi_n\| < M \quad \forall n$

Однако заметим, что

$$\|c_k\| = \left\| \frac{2(-1)^{n+1} \sinh(1)\pi^2}{\pi^2 + \frac{1}{n^2}} \right\| \geq \left\| \frac{2\sinh(1)\pi^2}{1+\pi^2} \right\| = m > 0, \text{ т.е.}$$

$\|\varphi_n\| > \sum_{k=1}^{n} m^2 = n m^2 \longrightarrow \infty \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходимости в смысле $L^2$ нет.

в) <u>Лемма</u>. Из последовательности $S_n \xrightarrow{L^1} \psi$ можно выбрать подпоследовательность $S_{n_k} \longrightarrow \psi$ почти всюду.

Заметим, при $x \to 1$ $\cos n\pi x \sim (-1)^n$, т.е. общий член ряда будет одного знака $\Rightarrow$ можно взять $x$ так близко к 1, что $S_{N_k}$ по модулю будет больше любого заранее заданного числа ($S_{N_k}$ – сумма первых $N_k$ слагаемых). Но окрестность единицы нельзя выбросить, так как она имеет положительную меру $\Rightarrow$ сходимости по $L_1$-норме нет.

Задача № 2

а) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} c_{k,m} \cos(kx)\sin(my) \in L^2((0,\pi)^2)$.

По т. Рисса - Фишера достаточно показать, что $\sum\limits_{k,m}' c_{k,m}^2 < \infty$

При $k, m > N$ $\quad c_{k,m} \sim \left(1 - \left(1 - \left(\frac{1}{k^{3/4} m}\right)^2\right)\right) \ln km \Rightarrow$

$c^2 = \frac{\ln^2 km}{k^3 m^4} \leq \frac{km}{k^3 m^4} = \Big/ \ln km = o(k^2 m^2) \Big/ = \frac{1}{k^2 m^3}$

Но ряд $\sum\limits_{k,m \geq N}^{\infty}{}' \frac{1}{k^2 m^3}$ сходится.

Зафиксируем $m$: $\quad \frac{1}{m^3}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots\right) \to c$

$\frac{1}{(m+1)^3}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots\right) \to c$

$\Downarrow$

$\sum c \frac{1}{m^3} = c \sum \frac{1}{m^3} \to cd$

следует из т. о суммир-и по двойному индексу

(Т) $\{f_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ - сем-во ар-х ф-ий. Тогда след. утв. равносильны:

1) $\sum\limits_{m,n} f_{m,n}$ сход-ся абсолютно и равномерно

2) Если $\forall m \in \mathbb{N}$ ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} f_{m,n}$ сход-ся абс-но и равном. к $f_m$, тогда $\sum\limits_{m}^{\infty} f_m$ сход-ся абс-но и равном.

При этом при 1) или 2) утв. $\sum\limits_{m,n}^{\infty} f_{m,n} = \sum\limits_{m}^{\infty} f_m$

б) Пусть $\varphi(x,y) = \int f(x,y)\,dx \Rightarrow \varphi(x,y) = \sum' \frac{c_{k,m}}{k} \sin(kx)\sin(my)$

Тогда $\frac{c_{k,m}}{k} \sim \frac{\ln km}{k^{5/2} m^2} < \frac{k^{\alpha} m^{\beta}}{k^{5/2} m^2} = \frac{1}{k^2 m^{3/2}}$ при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

Тогда ряд $\sum \frac{c_{k,m}}{k} \sin(kx)\sin(my)$ сход-ся равном. на $[0,\pi]^2$: по т. Вейерштрасса, т.к. для $k, m > N$ $\left|\frac{c_{k,m}}{k}\sin(kx)\sin(my)\right| < \frac{1}{k^2 m^{3/2}}$, ряд $\sum \frac{1}{k^2 m^{3/2}}$ сход-ся $\Longrightarrow$ для непр. $\varphi$ (как равном. предел непр.) $\sum' \frac{c_{k,m}}{k} \sin(kx)\sin(my) \rightrightarrows \varphi$

в) Пусть $\psi(x,y) = \int f(x,y)\,dy$

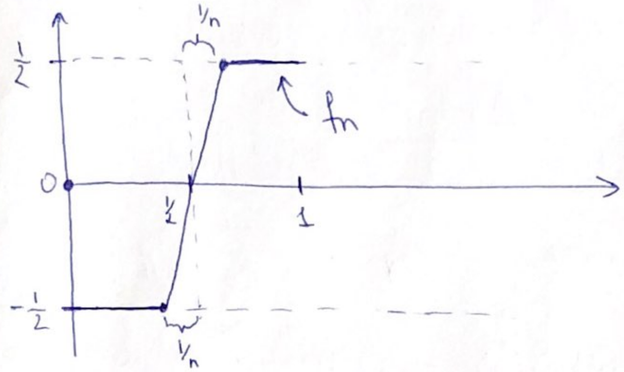
Тогда $\psi(x,y) = \sum -\frac{c_{k,m}}{m}\cos(kx)\cos(my)$

Тогда $\frac{c_{k,m}}{m} \sim \frac{\ln km}{k^{3/2}m^3} < \frac{k^{1/4}m}{k^{3/2}m^3} = \frac{1}{k^{5/4}m^2}$

Ряд $\sum \frac{1}{k^{5/4}m^2}$ сход-ся $\Rightarrow$ (аналогично п. б) по т. Вейерштрасса, $\sum -\frac{c_{k,m}}{m}\cos(kx)\cos(my) \rightrightarrows \psi$.

Задача №3

Покажем, что $V$ не замкнуто, построив последовательность $f_n \xrightarrow{L^2} f$, $f_n \in V$, $f \notin V$




Заметим, что $f_n \in V$, т.к. $f_n \in C[0,1]$, $\int_0^1 f_n dx = 0$

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \\ -\frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}, \text{ но } f \notin V.$$

Задача №4

$f(x)=x$ в $L^2(0,\pi)$ ; $S=\{\sin x, \cos x\}$

Ортогонализуем $S$:

$\|\sin x\|^2_{L^2} = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ ; $\|\cos x\|^2_{L^2} = \frac{\pi}{2}$

$(\sin x, \cos x) = \int_0^\pi \sin x \cos x\,dx = 0$

Получаем ортонорм. систему $\left\{\frac{\sin x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right\}$

Проецируем:

$\left(f, \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_0^\pi x \sin x\,dx = \sqrt{2\pi}$

$\left(f, \frac{\cos x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_0^\pi x \cos x\,dx = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$

Тогда $d = dist(x, span S)$:

$$d^2 = \|x - pr_S x\|^2 = \int_0^\pi \left(x - 2\sin x + \frac{4}{\pi}\cos x\right)^2 dx = \underbrace{\int_0^\pi x^2 dx}_{\pi^3/3} + 4\underbrace{\int_0^\pi \sin^2 x\,dx}_{\pi/2} +$$

$$+ \frac{16}{\pi^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos^2 x\,dx}_{\pi/2} - 4\underbrace{\int_0^\pi x\sin x\,dx}_{\pi} + \frac{8}{\pi}\underbrace{\int_0^\pi x\cos x\,dx}_{-2} - \frac{8}{\pi}\underbrace{\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx}_{0} =$$

$$= \frac{\pi^3}{3} - 2\pi - \frac{8}{\pi}$$

Значит, $d = \sqrt{\frac{\pi^3}{3} - 2\pi - \frac{8}{\pi}}$.